Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.

Exercice 1 : Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer l'expression explicite de u_n .

Exercice 3 : Soit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.

Exercice 1 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Déterminer l'expression explicite de u_n .

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{16 + u_n^2}{2}}$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Lien entre monotonie d'une fonction et les suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2 + \sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2 + \sqrt{3})$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{4}$, $u_1 = \frac{3}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + n + 3$.

Déterminer l'expression explicite de u_n .

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ à déterminer.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : α est racine de P si, et seulement si $X - \alpha$ divise P .

Exercice 1 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ ($a \neq b$).

Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Exercice 2 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$$

sont adjacentes.

Que peut-on en conclure. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)u_n$. Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \frac{1}{n+1}$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exercice 1 : Effectuer la division euclidienne de $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.**Exercice 2 :** Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé, avec $p \geq 2$.On définit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$.Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.**Exercice 3 :** Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}$.Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : En admettant le théorème précédent, si P admet n racines α_i distinctes alors P est divisible par le produit des $X - \alpha_i$.

Exercice 1 : Soit $P = X^n$ et $Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q .

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des complexes λ tels que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \lambda$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 1$.

Exercice 3 : Soit $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Théorème de Taylor pour les polynômes

Exercice 1 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $X^2 - aX + 1 \mid X^4 - X + a$.**Exercice 2 :** Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé, avec $p \geq 2$.On définit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$.Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.**Exercice 3 :** 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \\ \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \end{cases} \quad (n \text{ radicaux}).$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} = \pi$.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dans le cas complexe.

Exercice 1 : On considère le polynôme $P = X^{n+1} - (n+1)X + n$.

Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P ?

Exercice 2 : $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. CNS sur $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2$ pour que (u_n) et (v_n) soient adjacentes, sachant que :

$$u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{a + bv_n}.$$

Exercice 3 : Soient $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer : $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$;
2. Montrer : $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$;
3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent.

Nom :

Prénom :

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Tout réel est la limite de deux suites adjacentes de décimaux.

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 2 : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k-1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et encadrer sa limite.