Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.

Exercice 1 : Montrer que $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1$ divise $(\mathrm{X}-1)^{n+2} + \mathrm{X}^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Correction : $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}+j)(\mathrm{X}+j^2)$.

Or $\mathrm{P}(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = j^{2n+4} - (j)^{2n+1} = 0$.

Donc $-j$ et par suite $-j^2$ sont des racines de P. CQFD.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction : Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$ ayant pour racine double 2.

$u_n = (\lambda n + \mu)2^n$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ 2(\lambda + \mu) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)2^n}$$

Exercice 3 : Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.

Exercice 1 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction : Équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$ ayant pour racines j et j^2. Module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$

$u_n = 1^n \left(\lambda \cos \dfrac{2n\pi}{3} + \mu \sin \dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos \dfrac{2\pi}{3} + \mu \sin \dfrac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos \dfrac{2\pi}{3} + \mu \sin \dfrac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}.}$$

Exercice 3 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{16 + u_n^2}{2}}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}}$. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives à partir du rang 1.

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone.

Pour $x > 0$ on a $f(x) < x \iff \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}} < x \iff 4 < x$. Plusieurs cas :

— Si $u_0 \in [4, +\infty[$, $u_1 \leqslant u_0$: la suite est décroissante.

  Elle est également minorée par 4 : en posant $\mathrm{I} = [4, +\infty[$, on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{I}$.

  Elle converge donc.

— Si $u_0 \in [-4, 4]$, $u_1 \geqslant u_0$: la suite est croissante et majorée par 4 (on pose $\mathrm{I} = [-4, 4]$). Elle converge.

— Si $u_0 < -4$. Alors, $u_1 > 4$ et on reprend le premier point : la suite est décroissante (à partir du rang 1).

Dans tous les cas, la suite converge. Comme f est continue, elle converge vers un point fixe de f. 4 est le seul candidat.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Lien entre monotonie d'une fonction et les suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 1 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$, $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + n + 3$.

Déterminer l'expression explicite de u_n.

Correction :

— Rechercher de solution particulière (α_n) sous la forme : $\alpha_n = an + b$.

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n + n + 3 \iff \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{7}{4} \end{cases}.$$

— La suite définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.

Équation caractéristique : $r^2 - r - 2 = 0$ ayant pour racines -1 et 2.

$v_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.

Donc $u_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{7}{4}$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{4} \\ u_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu - \dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4} \\ -\lambda + 2\mu - \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{5}{3}2^n - \frac{n}{2} - \frac{7}{4}.}$$

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ à déterminer.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : α est racine de P si, et seulement si $\mathrm{X}-\alpha$ divise P.

Exercice 1 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ $(a \neq b)$.

Donner le reste dans la division euclidienne de P par $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Correction : $\mathrm{P}=(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)\mathrm{Q}+(u\mathrm{X}+v)$.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(a)=ua+v \\ \mathrm{P}(b)=ub+v \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u=\dfrac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a} \\ v=\dfrac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a} \end{cases}$$

$\mathrm{R}=\dfrac{\mathrm{P}(b)-\mathrm{P}(a)}{b-a}\mathrm{X}+\dfrac{b\mathrm{P}(a)-a\mathrm{P}(b)}{b-a}$.

Exercice 2 : Soient $u_0>0$ et $v_0>0$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+v_n\right) \qquad \text{et} \quad \frac{2}{v_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}$$

sont adjacentes.

Que peut-on en conclure. Déterminer $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Exercice 3 : Soit $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1}=(1-u_n)u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n<\dfrac{1}{n+1}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto (1-x)x$ et $\mathrm{I} =]0,1[$. On a $f(\mathrm{I}) = \left]0, \dfrac{1}{4}\right] \subset \mathrm{I}$.

On a $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante.

positive, elle est convergente.f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$.

— $u_1 \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc on a bien $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ au rang 1.
— Supposons que $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

  Alors f étant strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $f(u_n) < f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

  C'est à dire $u_{n+1} < \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

  Mais $\dfrac{n}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+2}$ puisque $n(n+2) < (n+1)^2$. D'où $u_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$.

et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exercice 1 : Effectuer la division euclidienne de $X^3 + iX^2 + X$ par $X - i + 1$.

Correction : $Q = X^2 + (-1+2i)X - 3i$

$R = 3 + 3i$.

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé, avec $p \geqslant 2$.

On définit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Correction :

— $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^p} \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{n^{p-1} + n^{p-1}(n+1) - (n+1)^p}{n^{p-1}(n+1)^p}$ car $p \geqslant 2$.

$$= \frac{(2-p)n^{p-1} - \binom{p}{2}n^{p-2} - \cdots}{n^{p-1}(n+1)^p} < 0$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

— On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{n^{p-1}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : En admettant le théorème précédent, si P admet n racines α_i distinctes alors P est divisible par le produit des $\mathrm{X}-\alpha_i$.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{P}=\mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^3-3\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}-1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des complexes λ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=\lambda$, et $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=u_{n+1}-\dfrac{1}{4}u_n$ vérifie $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 1$.

Correction : L'équation caractéristique est $\mathrm{E}_c : r^2=r-\dfrac{1}{4}$. Elle admet une solution double : $\dfrac{1}{2}$.

Il existe donc deux constantes A,B telles que $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=(\mathrm{A}n+\mathrm{B})\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{cases} u_0=0\\ u_1=\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\mathrm{B}=0\\ \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\mathrm{B}=0\\ \mathrm{A}=2\lambda\end{cases}. \text{ Donc } \forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{2\lambda n}{2^n}.$$

— Si $\lambda=0$, on a $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=0$ donc la suite convient.

— Si $\lambda\neq 0$, on a $\forall\, n\in\mathbb{N}^\star,\quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\leqslant 1$. La suite $(|u_n|)$ est donc décroissante à partir du rang 1 (et nulle en 0). Elle est donc majorée par son premier terme $|u_1|=|\lambda|$.

Bilan

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leqslant 1 \iff |\lambda|\leqslant 1.}$$

Exercice 3 : Soit $u_0=\dfrac{\pi}{4}$ et $u_{n+1}=1-\cos u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto 1 - \cos x$. f est croissante sur $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(\mathrm{I}) = [0,1] \subset \mathrm{I}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans I. f étant croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. $u_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Minorée par 0, elle converge. Sa limite ℓ est un point fixe de f continue sur I. C'est-à-dire $1 - \cos \ell = \ell$. Seule possibilité 0. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Autre possibilité : étude de $\phi : x \mapsto 1 - \cos x - x$. $\phi'(x) = \sin x - 1 < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc ϕ est strictement décroissante sur cet intervalle.

  Comme $\phi(0) = 0$, on a $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \phi(x) < 0$ et donc $f(x) < x$.

  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante, et le seul point fixe de f est 0.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Théorème de Taylor pour les polynômes

Exercice 1 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + 1 | \mathrm{X}^4 - \mathrm{X} + a$.

Correction : $\mathrm{X}^4 - \mathrm{X} + a = (\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + a^2 - 1) + (a^3 - 2a - 1)\mathrm{X} - a^2 + a + 1$.

$$\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} + 1 | \mathrm{X}^4 - \mathrm{X} + a \iff \begin{cases} a^3 - 2a - 1 = 0 \\ -a^2 + a + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a+1)(a^2 - a - 1) = 0 \\ -a^2 + a + 1 = 0 \end{cases} \iff -a^2 + a + 1 = 0.$$

On en déduit $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé, avec $p \geqslant 2$.

On définit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Correction :

— $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^p} \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

— $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} = \frac{n^{p-1} + n^{p-1}(n+1) - (n+1)^p}{n^{p-1}(n+1)^p} \text{ car } p \geqslant 2.$$
$$= \frac{(2-p)n^{p-1} - \binom{p}{2}n^{p-2} - \cdots}{n^{p-1}(n+1)^p} < 0$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

— On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \dfrac{1}{n^{p-1}}$ d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Exercice 3 : 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases}$ (n radicaux).

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \pi$.

Correction : Par récurrence :

— $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$. Les formules sont vraies au rang 1.

— Supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases}$ (n radicaux).

On a alors :

$$\cos^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)$$

Or $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ ($n+1$ radicaux).

De même,

$$\sin^2 \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right) = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)$$

Or $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ ($n+1$ radicaux).

La propriété est donc héréditaire.

On a $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $\dfrac{2^{n+1}}{\pi} \times \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \pi.}$$

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dans le cas complexe.

Exercice 1 : On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{X} + n$.

Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P ?

Exercice 2 : $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. CNS sur $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2$ pour que (u_n) et (v_n) soient adjacentes, sachant que :

$u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{a + bv_n}$.

Correction : On pose $f : x \mapsto \sqrt{a + bx}$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$. On a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Les suites sont correctement définies et à valeurs dans I.

f est croissante sur I donc les suites sont monotones.

Sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{a + bx} \leqslant x \iff a + bx \leqslant x^2$.

$\Delta = b^2 + 4a > 0$ donc l'équation $a + bx = x^2$ admet deux solutions $\ell = \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $\ell' = \dfrac{b - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$.

- Si l'on pose $\mathrm{I} = [0, \ell]$, on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Si $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite su est croissante, et converge vers ℓ.
- Si l'on pose $\mathrm{J} = [\ell, +\infty[$, on a $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$. Si $u_0 \in \mathrm{J}$, la suite su est décroissante, et converge vers ℓ.

On en conclut donc que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si, et seulement si, u_0 et v_0 sont pris de part et d'autre de $\ell = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$.

Exercice 3 : Soient $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer : $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$;
2. Montrer : $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$;
3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent.

Correction :

1. Par récurrence :
   — Vrai au rang $n = 1$.
   — Supposons que $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$. Montrons qu'alors $S_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

   Or $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

   CQFD.
2. Par récurrence :
   — Vrai au rang $n = 1$.
   — Supposons que $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$. Montrons qu'alors $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant S_{n+1}$.

   Or $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2$.

   On aura donc $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant S_{n+1}$ si $\frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2 \geqslant 2\sqrt{n+2} - 2$.

   Or $\frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} \iff 2n+3 \geqslant 2\sqrt{(n+2)(n+1)} \iff 4n^2 + 12n + 9 \geqslant 4n^2 + 12n + 8$.
   D'où $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant S_{n+1}$.

   CQFD.
3.
   — On a donc $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ et alors $2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

   Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ ou encore $S_n \sim 2\sqrt{n}$.
   — $v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - S_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 0$.

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   Or elle est également minorée : $v_n = S_n - 2\sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \leqslant -2$. Elle est donc convergente.

Suites récurrentes et Polynômes

Question de cours : Tout réel est la limite de deux suites adjacentes de décimaux.

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de a le polynôme $(\mathrm{X}+1)^7 - \mathrm{X}^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction : β est une racine multiple de $\mathrm{P} \iff \mathrm{P}(\beta) = \mathrm{P}'(\beta) = 0$.

Or $\mathrm{P}'(\beta) = 0 \iff 7(\beta+1)^6 - 7\beta^6 = 0 \iff (\beta+1)^6 = \beta^6$.

0 n'est pas solution de cette équation donc

$\mathrm{P}'(\beta) = 0 \iff \left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)^6 = 1 \iff 1 + \dfrac{1}{\beta} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}$.

On cherche les racines réelles donc $k=3$ et $\beta = -\dfrac{1}{2}$.

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^7 - a = 0 \iff a = \dfrac{1}{2^6}$.

Exercice 2 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k-1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et encadrer sa limite.