Fichiers Suites-Recurrentes a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+2x}$. f est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

En posant $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$, on a $f(\mathrm{I}) = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\subset \mathrm{I}$.

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et même $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

La fonction f étant décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

Comme elles sont bornées, elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$ continue.

$f \circ f(x) = x \iff \dfrac{2+3x}{3+4x} = x \iff 4x^2 = 2$. Le seul point fixe de $f \circ f$ dans I est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto xe^{-x}$. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 3 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$. En posant $\mathrm{I} = [1, +\infty[$, f étant croissante sur I, on en déduit que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone.

D'autre part, $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant x$. D'où la décroissance de $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Cette suite est par conséquent convergente. Sa limite est un point fixe de f (continue) sur I. 1 est le seul. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 4 : Soit $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. $f\left(\mathbb{R}_+\right) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives.

$\forall x \geqslant 0, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante. Étant positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 5 : Soit $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$. Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto 1 - \cos x$. f est croissante sur $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(\mathrm{I}) = [0, 1] \subset \mathrm{I}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans I. f étant croissante, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. $u_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4}$.

— La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. Minorée par 0, elle converge. Sa limite ℓ est un point fixe de f continue sur I. C'est-à-dire $1 - \cos \ell = \ell$. Seule possibilité 0. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

— Autre possibilité : étude de $\phi : x \mapsto 1 - \cos x - x$. $\phi'(x) = \sin x - 1 < 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc ϕ est strictement décroissante sur cet intervalle.

  Comme $\phi(0) = 0$, on a $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \phi(x) < 0$ et donc $f(x) < x$.

  La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante, et le seul point fixe de f est 0.

Exercice 6 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{16 + u_n^2}{2}}$.

Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}}$. $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. La suite est correctement définie et à valeurs positives à partir du rang 1.

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone.

Pour $x > 0$ on a $f(x) < x \iff \sqrt{\dfrac{16+x^2}{2}} < x \iff 4 < x$. Plusieurs cas :

— Si $u_0 \in [4, +\infty[$, $u_1 \leqslant u_0$: la suite est décroissante.

  Elle est également minorée par 4 : en posant $\mathrm{I} = [4, +\infty[$, on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{I}$.

  Elle converge donc.

— Si $u_0 \in [-4, 4]$, $u_1 \geqslant u_0$: la suite est croissante et majorée par 4 (on pose $\mathrm{I} = [-4, 4]$). Elle converge.

— Si $u_0 < -4$. Alors, $u_1 > 4$ et on reprend le premier point : la suite est décroissante (à partir du rang 1).

Dans tous les cas, la suite converge. Comme f est continue, elle converge vers un point fixe de f. 4 est le seul candidat.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 7 : On définit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$ admet un, et un seul point fixe α.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite de référence.
3. En déduire l'expression explicite de v_n, puis de u_n.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 : Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 : Soit $u_0 \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 : Soit $u_0 \in \mathbb{R}^\star$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{u_n}$.

Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 : Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin u_n \end{cases}$ converge quelle que soit la valeur de u_0.

Exercice 12 : Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ à déterminer.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = (1 - u_n)u_n$. Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Correction : Soit $f : x \mapsto (1 - x)x$ et $\mathrm{I} =]0, 1[$. On a $f(\mathrm{I}) = \left]0, \dfrac{1}{4}\right] \subset \mathrm{I}$.

On a $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant x$. La suite est donc décroissante.

positive, elle est convergente. f est continue et admet un seul point fixe : 0.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$.

- $u_1 \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc on a bien $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ au rang 1.
- Supposons que $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

  Alors f étant strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $f(u_n) < f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

  C'est à dire $u_{n+1} < \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

  Mais $\dfrac{n}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+2}$ puisque $n(n+2) < (n+1)^2$. D'où $u_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$.

et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 2 : Soit $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}$ où u_n comporte n radicaux emboîtés.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

On pose $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ et $\mathrm{I} = [0, 2]$. On a $f(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$. La suite est correctement définie et à valeurs dans I.

f est croissante sur I donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Or $u_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Elle est donc convergente. Sa limite ℓ est un point fixe de f (continue).

$f(\ell) = \ell \iff \sqrt{2\ell} = \ell \iff \sqrt{\ell}(\sqrt{2} - \sqrt{\ell}) = 0 \iff \ell = 0$ ou $\ell = 2$.

Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et comme $u_1 = \sqrt{2}$, la suite ne peut converger vers 0. D'où finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

$$\boxed{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}} = 2.}$$

Exercice 3 : Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \ \forall n \geqslant 0.$$

Exercice 4 : Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{(u_n - 3)^2}{4}$.

Exercice 5 : Étudier la suite définie par $u_{n+1} = e^{-u_n}$ et $u_0 = 0$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Montrer que $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}$.

Correction :

— Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Ici, croissante. Comme $f(x) = x$ admet pour seule solution $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, c'est le seul point fixe de f. $[0, \phi]$ est stable par f.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, majorée. Elle converge donc vers le point fixe de f (continue). D'où $\lim u = \phi$.

— Soit $g : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = f(v_n)$.

  g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g([1,2]) \subset [1,2]$. Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est bornée.

  Or les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones, et bornées. Elles convergent donc toutes deux vers un point fixe de $g \circ g$ (continue) sur $[1,2]$.

  Or $g \circ g(x) = x$ admet pour seule solution positive $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sur $[1,2]$.

  Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle-même vers ϕ. CQFD.

Exercice 2 : Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3 + 7}{3(u_n^2 + 1)}$ et $u_0 = 2$.

En déduire une valeur approchée à 10^{-8} près de la racine réelle du polynôme $\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} - 7$.