Suites I

Partie A – Définitions

1. Définir précisément le degré d'un polynôme. Que vaut le degré du polynôme nul ?
2. Qu'est-ce qu'un polynôme unitaire ?
3. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
4. Qu'est-ce que l'ordre de multiplicité d'une racine ?
5. Définir ce qu'est un polynôme annulateur d'une matrice M.
6. Quelles sont les seules conditions qui garantissent qu'un polynôme est inversible dans $(\mathbb{K}[X], \times)$? Justifier.

   Les unités de $\mathbb{K}[X]$ sont exactement les constantes non nulles.

   En effet, si $PQ = 1$, alors $\deg P + \deg Q = \deg 1 = 0$, donc $\deg P = \deg Q = 0$.

   Réciproquement, toute constante non nulle est inversible.
7. Énoncer et justifier la formule du degré de la composée.

   Si Q est non constant ($\deg Q \geqslant 1$) et $P \neq 0$, alors

   $$\deg(P \circ Q) = \deg P \cdot \deg Q.$$

   Si $P = a_n X^n + \cdots$ et $Q = b_m X^m + \cdots$ avec $a_n, b_m \neq 0$, alors $P(Q(X)) = a_n (Q(X))^n + \cdots$ dont le terme de plus haut degré vaut $a_n b_m^n X^{nm}$, non nul.

   Cas limites : $P = 0$ donne $P \circ Q = 0$; si Q est constant, alors $P \circ Q$ est constant.
8. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1-x^2}$ sous leur forme condensée (avec Σ) et développée (sans Σ). On justifiera le second.

Partie B – Applications

1. Soit $P = X^3 - 3X + 2$.
   (a) Montrer que 1 est racine double de P.

   $P(1) = P'(1) = 0$ donc ...

   (b) Factoriser P.

   $$P = (X-1)^2(X+2).$$
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que A est annulée par le polynôme $X^2 + X - 2$.

(b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Déterminer A^n en fonction de A et I.

A satisfait $P(A) = A^2 + A - 2I = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit la division euclidienne

$$X^n = Q_n(X)P(X) + R_n(X), \qquad R_n(X) = a_n X + b_n,\ \deg R_n \leqslant 1,$$

donc $X^n \equiv R_n(X) \pmod{P(X)}$. En évaluant en A on obtient immédiatement

$$A^n = a_n A + b_n I.$$

Le polynôme P se factorise sur $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{R}$) :

$$P(X) = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2),$$

donc ses racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$, distinctes.

Pour ces racines on a $P(r_i) = 0$, donc l'identité $X^n \equiv R_n(X) \pmod{P(X)}$ entraîne l'égalité des valeurs en r_1 et r_2 :

$$r_1^n = R_n(r_1) = a_n r_1 + b_n, \qquad r_2^n = R_n(r_2) = a_n r_2 + b_n.$$

Ce sont deux équations linéaires en a_n, b_n :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1^n = 1, \\ -2a_n + b_n = (-2)^n. \end{cases}$$

D'où

$$a_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2+(-2)^n}{3}.$$

En évaluant en A, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \frac{1-(-2)^n}{3}\, A \;+\; \frac{2+(-2)^n}{3}\, I.$$

Commentaires : *Formule encore vraie pour $n = 0$.*

Suites I