Analyse asymptotique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer un équivalent simple de f en 0.
2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore f la nouvelle fonction prolongée par continuité. Préciser alors $f(0)$.
3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)$.
4. Peut-on en déduire (sans calcul) que f est dérivable en 0 ? $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^3$?
5. Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et donner également la position de cette tangente par rapport à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
6. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
7. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ en 0.
8. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f' .
9. Redémontrer alors le résultat de la question (3) .
10. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\ln(3)$ de f .