

Dénombrements

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 22



- 1 Généralités sur les ensembles finis
- 2 Dénombrements
- 3 Retour sur les coefficients binomiaux





La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensembles bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main.



Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un événement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

À l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert.

Philippe Geluck



I. Généralités sur les ensembles finis

1 Généralités sur les ensembles finis

- Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)
- Ensembles finis et applications
- Opérations sur les ensembles et cardinaux

2 Dénombrements

3 Retour sur les coefficients binomiaux



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\text{card}(E)$ ou $|E|$ le **cardinal** de E .



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\text{card}(E)$ ou $|E|$ le **cardinal** de E .

Exemple 1 :

$\text{card}(\emptyset) = 0$ et $\text{card}(\{\emptyset\}) = 1$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Définition 1 :

Intuitivement, le cardinal d'un ensemble correspond à sa taille. Pour un ensemble fini, il s'agit du nombre de ses éléments.

On note dans ce cas $\text{card}(E)$ ou $|E|$ le **cardinal** de E .

Exemple 1 :

$\text{card}(\emptyset) = 0$ et $\text{card}(\{\emptyset\}) = 1$.

On peut définir, comme on le verra plus tard, une notion de cardinal pour des ensembles infinis, mais l'intuition en est moins évidente. Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ont même cardinal !



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Intuitivement, un ensemble fini $\mathbb{E}$ de cardinal n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i décrivent $\mathbb{E}$ et sont deux à deux distincts.

En interprétant ceci avec l'application $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \mathbb{E}$,

$$i \longmapsto x_i$$

■ le fait que les x_i décrivent $\mathbb{E}$ signifie que φ est surjective,



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Intuitivement, un ensemble fini $\mathbb{E}$ de cardinal n est un ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i décrivent $\mathbb{E}$ et sont deux à deux distincts.

En interprétant ceci avec l'application $\varphi : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \mathbb{E}$,

$$i \longmapsto x_i$$

- le fait que les x_i décrivent $\mathbb{E}$ signifie que φ est surjective,
- le fait que les x_i soient deux à deux distincts, signifie que φ est injective.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul noté $\text{card}(\mathbb{E}) = 0$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul noté $\text{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son **cardinal** est n noté $\text{card}(\mathbb{E}) = n$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul noté $\text{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son **cardinal** est n noté $\text{card}(\mathbb{E}) = n$.

Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est infini.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Ceci motive la définition suivante :

Définition 2 :

On dit qu'un ensemble $\mathbb{E}$ est **fini** s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- $\mathbb{E}$ est l'ensemble vide, auquel cas on dit que son **cardinal** est nul noté $\text{card}(\mathbb{E}) = 0$.
- $\mathbb{E}$ est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$, auquel cas on dit que son **cardinal** est n noté $\text{card}(\mathbb{E}) = n$.

Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{E}$ est infini.

Remarque : Si les ensembles $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, m\}$ sont en bijection, alors $n = m$. Le cardinal d'un ensemble fini $\mathbb{E}$ est donc bien défini. Il indique le nombre d'éléments de $\mathbb{E}$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Exemples 2 :

- $\llbracket p; q \rrbracket$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

Il suffit de prendre pour φ , l'injection canonique :

$$\begin{array}{ccc} i : \llbracket 1; q - p + 1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket p; q \rrbracket \\ i & \longmapsto & p - 1 + i \end{array} .$$



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Exemples 2 :

- $\llbracket p; q \rrbracket$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

Il suffit de prendre pour φ , l'injection canonique :

$$\begin{aligned} i : \llbracket 1; q - p + 1 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket p; q \rrbracket \\ i &\longmapsto p - 1 + i \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

L'application $i : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \mathbb{U}_n$ est bijective, donc $\mathbb{U}_n$ est fini et

$$k \longmapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\text{card}(\mathbb{U}_n) = n.$$



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Exemples 2 :

- $\llbracket p; q \rrbracket$ est fini de cardinal $q - p + 1$.

Il suffit de prendre pour φ , l'injection canonique :

$$\begin{aligned} i : \llbracket 1; q - p + 1 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket p; q \rrbracket \\ i &\longmapsto p - 1 + i \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

L'application $i : \llbracket 1; n \rrbracket \longrightarrow \mathbb{U}_n$ est bijective, donc $\mathbb{U}_n$ est fini et

$$k \longmapsto e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$\text{card}(\mathbb{U}_n) = n$.

- Si $\mathbb{F}$ est un sous-ensemble d'un ensemble fini $\mathbb{E}$ et si $\mathbb{1}_{\mathbb{F}}$ est sa fonction caractéristique, on a :

$$\text{card}(\mathbb{F}) = \sum_{x \in \mathbb{E}} \mathbb{1}_{\mathbb{F}}(x). \quad (1)$$



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Proposition I (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient E un ensemble fini et F une partie de E .

Alors :

- F est finie, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Proposition I (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient E un ensemble fini et F une partie de E .

Alors :

- F est finie, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.
- De plus, si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ alors $F = E$.



I. Généralités sur les ensembles finis

1. Notion intuitive de cardinal d'un ensemble (fini)

Proposition I (Cas particulier d'un sous-ensemble) :

Soient E un ensemble fini et F une partie de E .

Alors :

- F est finie, et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.
- De plus, si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$ alors $F = E$.

Remarques : Si E et F sont deux ensembles de même cardinaux, il suffit de montrer une inclusion pour avoir l'égalité.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

❶ Si f est bijective, alors :

E est fini de cardinal $n \iff F$ est fini de cardinal n et on a
 $\text{card}(E) = \text{card}(F)$



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

❶ Si f est bijective, alors :

E est fini de cardinal $n \iff F$ est fini de cardinal n et on a
 $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

❷ Si f est injective, alors :

F est fini $\implies E$ est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 2 (Effet d'une application sur le cardinal) :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

❶ Si f est bijective, alors :

E est fini de cardinal $n \iff F$ est fini de cardinal n et on a
 $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

❷ Si f est injective, alors :

F est fini $\implies E$ est fini et $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.

❸ Si f est surjective, alors :

E est fini $\implies F$ est fini et $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f , $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité.
Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}) \quad - \text{assertion (3)}.$$



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f , $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité.
Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}) \quad - \text{assertion (3)}.$$

- Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de $\mathbb{E}$ sont envoyés par f sur deux points distincts de $\mathbb{F}$, *i.e.* que $f(\mathbb{E})$ est comme une copie de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

Une telle copie n'est possible que si $\mathbb{F}$ est « plus gros » que $\mathbb{E}$ *i.e.* si :

$$\text{card}(\mathbb{E}) \leq \text{card}(\mathbb{F}) \quad - \text{assertion (2)}.$$



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

- Dire que f est surjective, c'est dire qu'à travers f , $\mathbb{E}$ couvre $\mathbb{F}$ en totalité.
Une telle couverture n'est possible que si $\mathbb{E}$ est « plus gros » que $\mathbb{F}$ *i.e.* si

$$\text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}) \quad - \text{assertion (3)}.$$

- Dire que f est injective, c'est dire que deux points distincts de $\mathbb{E}$ sont envoyés par f sur deux points distincts de $\mathbb{F}$, *i.e.* que $f(\mathbb{E})$ est comme une copie de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

Une telle copie n'est possible que si $\mathbb{F}$ est « plus gros » que $\mathbb{E}$ *i.e.* si :

$$\text{card}(\mathbb{E}) \leq \text{card}(\mathbb{F}) \quad - \text{assertion (2)}.$$

- Conséquence, une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier, ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont la même image.
C'est ce que l'on appelle familièrement le « principe des tiroirs de Dirichlet » :

Si on range p chaussettes dans n tiroirs et que $n < p$, il existe au moins deux chaussettes qui sont dans le même tiroir.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Exercice I :

Étant donnés 5 points dans un carré d'arête 2, montrer qu'on peut toujours en trouver deux distants d'au plus $\sqrt{2}$.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 3 :

Soient E et F deux ensembles de même cardinal n et une application $f : E \mapsto F$.

On alors les équivalences suivantes :

- 1 f est bijective.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 3 :

Soient E et F deux ensembles de même cardinal n et une application $f : E \mapsto F$.

On alors les équivalences suivantes :

- ❶ f est bijective.
- ❷ f est injective.



I. Généralités sur les ensembles finis

2. Ensembles finis et applications

Théorème 3 :

Soient E et F deux ensembles de même cardinal n et une application $f : E \mapsto F$.

On alors les équivalences suivantes :

❶ f est bijective.

❷ f est injective.

❸ f est surjective.



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Proposition 4 (Cardinal d'une réunion, d'une différence) :

Soient E , F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et on a :

Réunion : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$.

En particulier, si E et F sont disjoints, on a :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F).$$



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Proposition 4 (Cardinal d'une réunion, d'une différence) :

Soient E, F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et on a :

Réunion : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$.

En particulier, si E et F sont disjoints, on a :

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F).$$

Différence : $\text{card}(E \setminus F) = \text{card}(E) - \text{card}(E \cap F)$.

En particulier, si $F \subset E$,

$$\text{card}(\overline{F}) = \text{card}(E \setminus F) = \text{card}(E) - \text{card}(F).$$



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Lorsque les ensembles $A_1, \dots, A_n$ sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\text{card} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card} (A_i),$$

porte le joli nom de **principe des bergers** en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Lorsque les ensembles $A_1, \dots, A_n$ sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\text{card} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card} (A_i),$$

porte le joli nom de **principe des bergers** en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Théorème 5 (Principe des bergers) :

Toute réunion DISJOINTE de n ensembles de même cardinal p
est un ensemble de cardinal np .



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Lorsque les ensembles $A_1, \dots, A_n$ sont disjoints de même cardinal, la formule :

$$\text{card} \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{card} (A_i),$$

porte le joli nom de **principe des bergers** en référence au berger désireux de compter le nombre de ses moutons en ne pouvant compter que leurs pattes.

Théorème 5 (Principe des bergers) :

Toute réunion DISJOINTE de n ensembles de même cardinal p
est un ensemble de cardinal np .

Tout ça pour dire qu'un berger qui possède n moutons possède aussi $4n$ pattes de moutons !



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Exemple 3 :

Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Un tableau de taille $n \times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases !



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Exemple 3 :

Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$.

Un tableau de taille $n \times p$ contient n lignes et chaque ligne contient p cases, donc un tel tableau contient np cases !

Exercice 2 :

À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Proposition 6 (Cardinal d'un produit) :

Soient E, F deux ensembles finis. Alors $E \times F = \{ (x; y), x \in E \text{ et } y \in F \}$ est fini et on a :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$



I. Généralités sur les ensembles finis

3. Opérations sur les ensembles et cardinaux

Proposition 6 (Cardinal d'un produit) :

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux ensembles finis. Alors $\mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{ (x; y), x \in \mathbb{E} \text{ et } y \in \mathbb{F} \}$ est fini et on a :

$$\text{card}(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \text{card}(\mathbb{E}) \times \text{card}(\mathbb{F}).$$

Cette proposition se généralise immédiatement par récurrence :

Corollaire 1 :

Si $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_p$ sont des ensembles finis, alors $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_p$ est fini et

$$\text{card}(\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_p) = \text{card}(\mathbb{E}_1) \times \text{card}(\mathbb{E}_2) \times \dots \times \text{card}(\mathbb{E}_p).$$

En particulier si $\mathbb{E}$ est un ensemble fini, $\mathbb{E}^p$ est fini de cardinal $(\text{card}(\mathbb{E}))^p$, $p \geq 1$.



II. Dénombrements

1 Généralités sur les ensembles finis

2 **Dénombrements**

- Introduction
- Listes et Arrangements
- Nombre d'applications et combinaisons
- Dénombrement des parties d'un ensemble fini

3 Retour sur les coefficients binomiaux



II. Dénombrements

Il y trois sortes de gens :

❶ *ceux qui savent compter et*



II. Dénombrements

Il y trois sortes de gens :

- ❶ *ceux qui savent compter et*
- ❷ *ceux qui ne savent pas !*



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?
- Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$?



II. Dénombrements

1. Introduction

En pratique Nous allons dans cette partie apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

- À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?
- Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
- De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? et successivement avec remise ? et sans remise ?
- Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?
- De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? autour d'une table ronde ?
- Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$?
- Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties ?



II. Dénombrements

1. Introduction

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.



II. Dénombrements

1. Introduction

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.

Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, imaginez-vous concrètement en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix cela vous laisse. Notre règle d'or dans ce chapitre sera ainsi la suivante :

COMPTER, C'EST ENUMERER/CONSTRUIRE.



II. Dénombrements

1. Introduction

Chacune de ces questions requiert, certes, un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens.

Pour savoir de combien de façons on peut asseoir n personnes sur un banc rectiligne, imaginez-vous concrètement en train d'asseoir ces personnes et demandez-vous combien de choix cela vous laisse. Notre règle d'or dans ce chapitre sera ainsi la suivante :

COMPTER, C'EST ENUMERER/CONSTRUIRE.

Énumérer, c'est ordonner selon un principe de classement RÉFLÉCHI.



II. Dénombrements

1. Introduction

Exemple 4 :

Pour énumérer les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on les lit généralement en colonnes de gauche à droite et du haut vers le bas - ce choix est bien sûr tout à fait conventionnel !

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}, a_{n1}, \dots, a_{np}.$$



II. Dénombrements

1. Introduction

Exemple 5 :

Combien l'ensemble $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ a-t-il de parties ?

La réponse est 16.

Énumération lexicographique en fonction du cardinal : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\},$
 $\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$

II. Dénombrements

1. Introduction

Exemple 5 :

Combien l'ensemble $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ a-t-il de parties ?

La réponse est 16.

Énumération lexicographique en fonction du cardinal : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},$
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\},$
 $\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$

Énumération lexicographique après représentation par des mots : On peut associer bijectivement à toute partie A de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ un et un seul mot de 4 lettres sur l'alphabet $\{0, 1\}.$

De quelle manière ? La première lettre de ce mot est un « 1 » si $1 \in A$ et un « 0 » sinon, la deuxième lettre est un « 1 » si $2 \in A$ et un « 0 » sinon, ...

Par exemple, $\emptyset$ est représenté par 0000, $\{2\}$ par 0100, $\{2, 3\}$ par 0110 et $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ par 1111.

Ainsi représentées, les parties de $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ sont faciles à énumérer lexicographiquement :

0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110, 0001,
1001, 0101, 1101, 0011, 1011, 0111, 1111.

II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 3 (p -liste) :

Soit E un ensemble fini.

On appelle p -liste de E tout p -uplet d'éléments de E , c'est à dire un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 3 (p -liste) :

Soit E un ensemble fini.

On appelle p -liste de E tout p -uplet d'éléments de E , c'est à dire un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$.

ATTENTION

L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 3 (p -liste) :

Soit E un ensemble fini.

On appelle p -liste de E tout p -uplet d'éléments de E , c'est à dire un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$.

ATTENTION

L'ordre des éléments compte et il peut y avoir des répétitions.

Proposition 7 (Nombre de p -listes) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p -listes (ou p -uplets) de E est égal à n^p .



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 3 (p -liste) :

Soit E un ensemble fini.

On appelle p -liste de E tout p -uplet d'éléments de E , c'est à dire un élément de $E^p = E \times E \times \dots \times E$.

Proposition 1 (Nombre de p -listes) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p -listes (ou p -uplets) de E est égal à n^p .

Dans une liste, l'ordre des éléments compte car une liste n'est jamais qu'une FAMILLE - et non pas un ensemble - et un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste.

Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages SUCCESSIFS AVEC REMISE - avec remise car les répétitions sont autorisées.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Exercice 3 :

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 4 (p -arrangement) :

Soit E un ensemble fini.

On appelle p -arrangement de E toute p -liste de E d'éléments **distincts**.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 4 (p -arrangement) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p -arrangement de $\mathbb{E}$ toute p -liste de $\mathbb{E}$ d'éléments **distincts**.

Proposition 8 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p -arrangements de $\mathbb{E}$ est égal à :

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Définition 4 (p -arrangement) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini.

On appelle p -arrangement de $\mathbb{E}$ toute p -liste de $\mathbb{E}$ d'éléments **distincts**.

Proposition 8 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de p -arrangements de $\mathbb{E}$ est égal à :

$$n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ si } p \leq n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Les arrangements sont utilisés pour modéliser des tirages SUCCESSIFS SANS REMISE - sans remise car les répétitions sont interdites.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Exemples 6 :

- Il y a $\frac{40!}{35!}$ possibilités de tirer 5 boules numérotées entre 1 et 40 (en tenant compte de l'ordre).



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Exemples 6 :

- Il y a $\frac{40!}{35!}$ possibilités de tirer 5 boules numérotées entre 1 et 40 (en tenant compte de l'ordre).
- Une course de chevaux comporte 20 partants. Le nombre de résultats possibles de tiercés dans l'ordre est $20 \times 19 \times 18 = 6840$.



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Exercice 4 :

De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

- ① sur un banc rectiligne ?



II. Dénombrements

2. Listes et Arrangements

Exercice 4 :

De combien de façons peut-on asseoir n personnes :

- ❶ sur un banc rectiligne ?
- ❷ autour d'une table ronde ?



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Théorème 9 (Nombres d'applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$) :

Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}_n$ deux ensembles finis de cardinal respectif p et n .

Alors, l'ensemble des applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, noté $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$, est fini et on a :

$$\text{card}(\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})) = \text{card}(\mathbb{F})^{\text{card}(\mathbb{E})} = n^p.$$



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Théorème 9 (Nombres d'applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$) :

Soient $\mathbb{E}_p$ et $\mathbb{F}_n$ deux ensembles finis de cardinal respectif p et n .

Alors, l'ensemble des applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, noté $\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})$, est fini et on a :

$$\text{card}(\mathcal{A}(\mathbb{E}; \mathbb{F})) = \text{card}(\mathbb{F})^{\text{card}(\mathbb{E})} = n^p.$$

Remarques :

- Une p -liste de $\mathbb{E}$ n'est jamais qu'une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\mathbb{E}$.
- Réciproquement, la donnée d'une application f de $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ dans $\mathbb{F}$ est équivalente à la donnée de la p -liste $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ de $\mathbb{F}$.



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Théorème 10 (Ensemble des parties) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Théorème 10 (Ensemble des parties) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Proposition II :

Soient E_p et F_n deux ensembles finis de cardinal respectif p et n .

Le nombre d'injections E dans F est $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$ et 0 sinon.



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Définition 5 ($\mathcal{S}(\mathbb{E})$) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n .

On appelle groupe des permutations de $\mathbb{E}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}$.



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Définition 5 ($\mathcal{S}(\mathbb{E})$) :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n .

On appelle groupe des permutations de $\mathbb{E}$, noté $\mathcal{S}(\mathbb{E})$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{E}$.

Proposition 12 :

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal n .

$$\mathcal{S}(\mathbb{E}) \text{ est fini} \quad \text{et} \quad \text{card}(\mathcal{S}(\mathbb{E})) = n!.$$



II. Dénombrements

3. Nombre d'applications et combinaisons

Exercice 5 :

Soit $n \geq 3$. Combien y a-t-il de permutations de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ qui envoient 1 sur 2 et 2 sur 3 ?



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Définition 6 (p -combinaison) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p -combinaison de E toute partie de E à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(E)$ leur ensemble.



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Définition 6 (p -combinaison) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p -combinaison de E toute partie de E à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(E)$ leur ensemble.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre.

Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Définition 6 (p -combinaison) :

Soit E un ensemble fini de cardinal n , et $p \in \mathbb{N}$.

On appelle p -combinaison de E toute partie de E à p éléments.

On note $\mathcal{P}_p(E)$ leur ensemble.

Dans une combinaison, qui est un ENSEMBLE et non une famille, les éléments sont donnés sans ordre.

Quand on décide de numéroter les éléments d'une combinaison, le choix de la numérotation est totalement arbitraire, la combinaison en tant que telle n'a pas un premier élément, un deuxième élément, etc.

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser des tirages SIMULTANÉS.



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Théorème 13 (Nombre de combinaisons) :

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de E de cardinal p (ou p -combinaisons de E) est $\binom{n}{p}$:

$$\text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}.$$



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Théorème 13 (Nombre de combinaisons) :

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de E de cardinal p (ou p -combinaisons de E) est $\binom{n}{p}$:

$$\text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}.$$

Exercice 6 :

De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Corollaire 2 (k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$) :

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers distincts $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ telles que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$



II. Dénombrements

4. Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Corollaire 2 (k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1; n \rrbracket$) :

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers distincts $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ telles que :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Exercice 7 :

On appelle anagramme d'un mot tout autre mot composé des mêmes lettres avec multiplicité, mais dans un ordre quelconque.

Les mots « NOSSMOI » et « SIONSOM » sont par exemple deux anagrammes du mot « MOISSON ».

Combien d'anagrammes le mot « BOROROS » possède-t-il ?



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1 Généralités sur les ensembles finis

2 Dénombrements

3 **Retour sur les coefficients binomiaux**

- Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :
- Coefficients binomiaux
- Bilan pratique



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

- Pour les p -listes d'éléments distincts, soit les p -arrangements, on tient compte de l'ordre.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

- Pour les p -listes d'éléments distincts, soit les p -arrangements, on tient compte de l'ordre.
- Pour les parties à p éléments, soit les p -combinaisons, aucun ordre pris en compte.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

- Pour les p -listes d'éléments distincts, soit les p -arrangements, on tient compte de l'ordre.
- Pour les parties à p éléments, soit les p -combinaisons, aucun ordre pris en compte.

On utilise donc les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de p éléments distincts parmi n , sans considération d'ordre et sans répétition.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er} groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er} groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le 2^{ème} groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er} groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le 2^{ème} groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.
- Ainsi de suite, ...



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

Dans une classe de 48 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes (l'ordre des groupes n'étant pas pris en compte).

Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Pour constituer des groupes de colles :

- On choisit 3 élèves pour constituer le 1^{er} groupe : $\binom{48}{3}$ possibilité.
- Une fois le premier groupe de colles réalise, on choisit 3 élèves parmi les 45 restants pour former le 2^{ème} groupe : il y a $\binom{45}{3}$ choix.
- Ainsi de suite, ...
- On compose le 16^{ème} groupe : $\binom{3}{3}$ choix.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \dots \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!} \frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \dots \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!} \frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Mais on a construit des 16-arrangements de groupes de colles : $(G_1, G_2, \dots, G_{16})$ alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{G_1, G_2, \dots, G_{16}\}$ de 16 groupes, sans ordre.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

1. Différence entre les p -arrangements et les parties à p éléments :

Exemple 1 :

On a ainsi :

$$\binom{48}{3} \times \binom{45}{3} \times \dots \times \binom{3}{3} = \prod_{i=1}^{16} \binom{3i}{3} = \prod_{i=1}^{16} \frac{(3i)!}{(3(i-1))!3!} = \frac{48!}{1!} \frac{1}{(3!)^{16}} = \frac{48!}{6^{16}} \text{ choix.}$$

Mais on a construit des 16-arrangements de groupes de colles : $(G_1, G_2, \dots, G_{16})$ alors que ce que l'on cherche à compter ce sont les ensembles $\{G_1, G_2, \dots, G_{16}\}$ de 16 groupes, sans ordre.

Il faut donc diviser par $16!$, nombre de façons de permuter $G_1, G_2, \dots, G_{16}$.

On obtient finalement $\frac{48!}{6^{16} \times 16!}$ choix.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

❶ **Symétrie** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

❶ **Symétrie** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine** : Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

❶ **Symétrie** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine** : Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

❸ **Formule de Pascal** : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}.$$

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Rappel :

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, on a :

❶ **Symétrie** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

❷ **Formule du capitaine** : Pour tout n, k de $\mathbb{N}^*$:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

❸ **Formule de Pascal** : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}.$$

❹ **Intégralité** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Exercice 8 :

Soient n , N et M trois entiers tels que $n \leq N + M$.

Montrer la formule, dite de Vandermonde,
$$\sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n}.$$



III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Proposition 14 (Formule du binôme de Newton) :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$



III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Proposition 14 (Formule du binôme de Newton) :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proposition 15 :

Si $\mathbb{E}$ est un ensemble fini à n éléments, alors l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ des parties de $\mathbb{E}$ est fini de cardinal 2^n :

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{E})) = 2^n.$$



III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

Exercice 9 (Application aux problèmes de rangement avec ou sans répétition) :

Déterminer le nombre de façons de ranger p objets dans n boîtes numérotées de 1 à n :

- ❶ sans répétition.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

2. Coefficients binomiaux

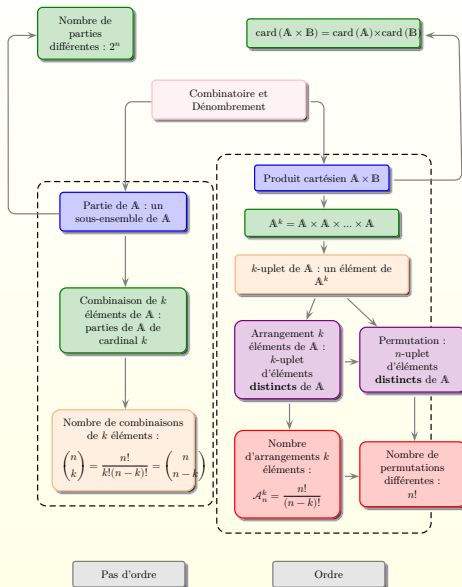
Exercice 9 (Application aux problèmes de rangement avec ou sans répétition) :

Déterminer le nombre de façons de ranger p objets dans n boîtes numérotées de 1 à n :

- ❶ sans répétition.
- ❷ avec répétition.



Soit n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

3. Bilan pratique

En pratique, un problème de dénombrement peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.



III. Retour sur les coefficients binomiaux

3. Bilan pratique

En pratique, un problème de dénombrement peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs
AVEC remise
=
Uplets

Tirages successifs
SANS remise
=
Arrangements

Tirages
SIMULTANÉS
=
Combinaisons

