Dénombrements

Exercice 1 : Montrer que :

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A\cup B\cup C) =&\text{Card}\,A+\text{Card}\,B+\text{Card}\,C\\ &-\text{Card}\,(A\cap B)-\text{Card}\,(A\cap C)-\text{Card}\,(B\cap C)\\ &+\text{Card}\,(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Correction :

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A\cup B\cup C) &= \text{Card}\,((A\cup B)\cup C)\\ &= \text{Card}\,(A\cup B)+\text{Card}\,C-\text{Card}\,((A\cup B)\cap C)\end{aligned}$$

or $\text{Card}\,(A\cup B) = \text{Card}\,A+\text{Card}\,B-\text{Card}\,A\cap B$

$$\begin{aligned}&\text{et Card}\,((A\cup B)\cap C)\\ &\quad= \text{Card}\,((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &\quad= \text{Card}\,A\cap C+\text{Card}\,B\cap C-\text{Card}\,((A\cap C)\cap(B\cap C))\\ &\quad= \text{Card}\,A\cap C+\text{Card}\,B\cap C-\text{Card}\,(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A\cup B\cup C) =&\text{Card}\,A+\text{Card}\,B+\text{Card}\,C\\ &-\text{Card}\,(A\cap B)-\text{Card}\,(A\cap C)-\text{Card}\,(B\cap C)\\ &+\text{Card}\,(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Exercice 2 : Dans une classe de 30 élèves, la LV1 est obligatoire (anglais ou allemand) et une LV2 est facultative (anglais, allemand ou espagnol). On sait qu'il y a :

- 3 élèves qui font anglais en LV1 et pas de LV2 ;
- 28 élèves qui font anglais en LV1 ou en LV2 ;
- 20 élèves qui font allemand en LV1 ou en LV2 ;
- 4 élèves qui ne font pas de LV2.
- il y a deux fois plus d'élèves qui font anglais en LV1 et allemand en LV2 que d'élèves qui font allemand en LV1 et anglais en LV2.

Déterminer le nombre d'élèves faisant chaque LV1, et chaque LV2.

Correction :

	Ang 2	All 2	Esp 2	$\emptyset$
Ang 1	0	x	y	3
All 1	a	0	b	1

$$\begin{cases} x+y+3+a=28 \\ x+a+b+1=20 \\ x=2a \\ x+y+a+b+4=30 \end{cases} \iff \begin{cases} x=12 \\ y=7 \\ a=6 \\ b=1 \end{cases}$$

	Ang 2	All 2	Esp 2	$\emptyset$
Ang 1	0	12	7	3
All 1	6	0	1	1

Exercice 3 : 1. Dénombrer les $(x,y)\in\{1,2,\cdots 10\}^2$ tels que 2 divise x ou 3 divise y.

2. Dénombrer l'ensemble des entiers n entre 1 et 100 tels que 2 divise n ou 3 divise n.

Correction :

1.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1			$\star$			$\star$			$\star$	
2	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
3			$\star$			$\star$			$\star$	
4	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
5			$\star$			$\star$			$\star$	
6	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
7			$\star$			$\star$			$\star$	
8	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
9			$\star$			$\star$			$\star$	
10	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Soient $\begin{cases} \mathrm{A}=\left\{(x,y)\in\{1,2,\cdots 10\}^2, 2|x\right\} \\ \mathrm{B}=\left\{(x,y)\in\{1,2,\cdots 10\}^2, 3|y\right\} \end{cases}$.

L'ensemble à dénombrer est alors :

$$\left\{(x,y)\in\{1,2,\cdots 10\}^2, 2|x \text{ ou } 3|y\right\} = \mathrm{A}\cup\mathrm{B}.$$

Or

(a) Card $\mathrm{A} = 5\times 10 = 50$;

(b) Card $\mathrm{B} = 3\times 10 = 30$;

(c) $\text{Card}\,(A \cap B) = 5 \times 3 = 15$.

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A \cup B) &= \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)\\ &= 50 + 30 - 15\\ &= 65\end{aligned}$$

$$\text{Card}\,\left(\left\{(x,y) \in \{1,2,\cdots 10\}^2\,, 2|x \text{ ou } 3|y\right\}\right) = 65$$

2. Soient $\begin{cases} A = \{n \in [\![1,100]\!], 2|n\} \\ B = \{n \in [\![1,100]\!], 3|n\} \end{cases}$.

L'ensemble à dénombrer est alors :

$$\{n \in [\![1,100]\!], 2|n \text{ ou } 3|n\} = A \cup B.$$

(a) $\text{Card}\,A = 50$;

(b) $\text{Card}\,B = 33$

(c) $\text{Card}\,(A \cap B) = \{n \in [\![1,100]\!], 6|n\} = 16$

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A \cup B) &= \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)\\ &= 50 + 33 - 16\\ &= 67\end{aligned}$$

$$\text{Card}\,\left(\{n \in [\![1,100]\!], 2|n \text{ ou } 3|n\}\right) = 67$$

Exercice 4 : En notant que :

— Une personne a au plus 100 000 cheveux,

— Nouméa compte 139 000 habitants,

Montrer que deux Nouméens au moins ont exactement le même nombre de cheveux.

Correction : On répartit les nouméens selon leur nombre de cheveux, dans 100 001 tiroirs.

Puisque Nouméa compte 139 000 habitants, le principe des tiroirs nous garantit que deux personnes au moins ont le même nombre de cheveux.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le principe des tiroirs, montrer que si $\mathbb{E}$ est un sous-ensemble de $[0\,;1[$ de cardinal $n+1$, alors il existe $(a\,;b) \in \mathbb{E}^2$ avec $a \neq b$ tel que $|a-b| < \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6 : Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$ qu'on tire toutes successivement sans remise.

Combien de tirages peut-on faire pour lesquels un numéro pair est toujours suivi d'un numéro impair et un numéro impair d'un numéro pair ?

Correction : Les tirages à dénombrer sont de deux types, il y a ceux qui commencent par un numéro pair et ceux qui commencent par un numéro impair. Nous allons dénombrer séparément ces deux ensembles de tirages et nous additionnerons à la fin les deux cardinaux obtenus.

— Combien sont-ils à commencer par un numéro pair ? Faire un tel tirage, c'est tirer une boule paire (n possibilités), puis une boule impaire (n possibilités), puis de nouveau une boule paire ($n-1$ possibilités), puis une boule impaire ($n-1$ possibilités), ...

D'où un total de $n^2 \times (n-1)^2 \times \ldots \times 2^2 \times 1^2 = n!^2$ tirages.

— Un raisonnement analogue montre que $(n!)^2$ tirages exactement commencent par un numéro impair.

Donc, un total définitif de $n!^2 + n!^2 = 2(n!)^2$.

Exercice 7 : Combien de mots de p lettres (ayant un sens ou non) peut-on former avec un alphabet de n lettres ?

Correction : Les mots de p lettre sont exactement les p-listes de lettres. Il y en a donc n^p.

Exercice 8 : Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot « OUPS » ? - par exemple, « BOUPSAR » et « QIOUPSI ».

Correction : Quand le mot « OUPS » apparaît dans un mot de 7 lettres, il n'y apparaît qu'une fois. Pour construire un mot quelconque de 7 lettres contenant le sous-mot « OUPS », on peut donc :

— d'abord choisir la position du mot « OUPS » (4 possibilités car le « O » initial ne peut occuper que les positions 1, 2, 3 et 4),

— puis choisir arbitrairement les autres lettres *i.e.* choisir une 3-liste de l'alphabet (26^3 possibilités).

D'où un total de $4 \times 26^3 = 70304$ mots.

Exercice 9 : De combien de façons peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Correction : $\dfrac{52!}{(52-5)!} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311\ 875\ 200.$

Exercice 10 : Comme le sait tout bon élève de prépa, un jeu de tarot contient 78 cartes : 21 atouts, la carte qu'on appelle l'« excuse » et 14 cartes de chacune des 4 couleurs cœur, pique, trèfle et carreau.

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant :

1. 2 atouts et 4 trèfles ?
2. exactement un atout et au moins 3 as ?

Correction :

Deux atouts et 4 trèfles : Il s'agit de choisir 2 atouts, $\binom{21}{2}$ possibilités, puis 4 trèfles, $\binom{14}{4}$ possibilités.

D'où un total de $\binom{21}{2} \times \binom{14}{4}$ tirages possibles.

Exactement un atout et au moins 3 as : On peut construire

$$\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2}$$

tirages contenant exactement un atout et exactement 3 as, et par ailleurs,

$$\binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1}$$

tirages contenant exactement un atout et les 4 as.

D'où un total de $\binom{21}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1} \times \binom{4}{4} \times \binom{78-21-4}{1}$ tirages possibles, les deux alternatives étant disjointes.

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dénombrer les couples (x, y) de $\{1, \cdots, n\}^2$ tels que :

1. $x \neq y$
2. $x \leqslant y$
3. $x < y$
4. $x + y = n$
5. $x + y \leqslant n$

Correction :

1. Construire un tel couple, c'est par exemple d'abord choisir x, puis choisir y.

   Il y a n valeurs possibles de x et, pour chacune de ces valeurs, $n-1$ valeurs restantes pour y, donc en tout $n(n-1)$ couples possibles.
2.

$x \setminus y$	1	2	3	$\cdots$	n
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(1,n)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$\cdots$	$(2,n)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\cdots$	$(3,n)$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n	$(n,1)$	$(n,2)$	$(n,3)$	$\cdots$	(n,n)

On peut compter par colonnes : $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

On peut aussi compter la diagonale et la moitié du reste :

$$n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sans le tableau, on peut dire :

— Si $x=1$, on a n choix possibles pour y (de 1 à n) ;
— Si $x=2$, on a $n-1$ choix possibles pour y (de 2 à n) ;
— Si $x=3$, on a $n-2$ choix possibles pour y (de 3 à n) ;
— $\vdots$
— Si $x=n$, on a 1 seul choix possible pour y ($y=n$).

Au final on a $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ possibilités.

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.

3.

$x\setminus y$	1	2	3	$\cdots$	n
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(1,n)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$\cdots$	$(2,n)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\cdots$	$(3,n)$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n	$(n,1)$	$(n,2)$	$(n,3)$	$\cdots$	(n,n)

Par colonnes : $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$.

On peut aussi compter la moitié du tableau (sans la diagonale) :

$$\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

Sans le tableau, on peut dire :

— Si $x=1$, on a $n-1$ choix possibles pour y (de 2 à n) ;
— Si $x=2$, on a $n-1$ choix possibles pour y (de 3 à n) ;
— $\vdots$
— Si $x=n-1$, on a 1 seul choix possible pour y ($y=n$).
— Si $x=n$, aucun couple ne convient.

Au final on a $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$ possibilités.

4.

$x\setminus y$	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$
2	3	4	$\cdots$	$n+1$	$n+2$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$n-2$	$n-1$	n	$\cdots$	$2n-3$	$2n-2$
$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$
n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n-1$	$2n$

Il y a $n-1$ couples qui conviennent.

Sans le tableau, on peut dire que si $x+y=n$, on doit avoir $y=n-x$.

Pour chaque choix de x, le y est déterminé de manière unique.

— Si $x=1$, on a 1 seul choix possible pour y $(y=n-1)$;
— Si $x=2$, on a 1 seul choix possible pour y $(y=n-1)$;
— $\vdots$
— Si $x=n-1$, on a 1 seul choix possible pour y $(y=1)$;
— Si $x=n$, aucun couple ne convient puisqu'il faudrait avoir $y=0$.

Au final on a $n-1$ possibilités.

5.

$x \setminus y$	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$
2	3	4	$\cdots$	$n+1$	$n+2$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$n-2$	$n-1$	n	$\cdots$	$2n-3$	$2n-2$
$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$
n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$2n-1$	$2n$

Par colonnes : $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$.

On peut aussi compter la moitié du tableau (sans la diagonale).

Sans le tableau, on peut dire que si $x+y \leqslant n$, on doit avoir $y \leqslant n-x$ *i.e.* $y \in [\![1, n-x]\!]$, donc $n-x$ possibilités.

— Si $x=1$, on a $n-1$ possibilités pour y (de 1 à $n-1$) ;
— Si $x=2$, on a $n-2$ possibilités pour y (de 1 à $n-2$) ;
— $\vdots$
— Si $x=n-1$, on a 1 seul choix possible pour y $(y=1)$;
— Si $x=n$, aucun couple ne convient.

Au final on a : $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$ possibilités.

Exercice 12 : Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Combien y a-t-il de résultats possibles dans les cas suivants :

1. on tire successivement et avec remise trois boules de l'urne ;
2. on tire successivement et sans remise trois boules de l'urne ;
3. on tire une poignée de trois boules de l'urne.

Correction :

1. on tire successivement et avec remise trois boules de l'urne ;

Dénombrements

$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$

2. on tire successivement et sans remise trois boules de l'urne ;

$\mathrm{A}_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$

3. on tire une poignée de trois boules de l'urne. $\dbinom{6}{3} = \mathrm{C}_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$

Exercice 13 : Déterminer le nombre d'anagrammes de chacun des mots :

PIE, LAPIN, CHEVRE, HIPPOPOTAME.

Correction :

1. PIE :

$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

2. LAPIN :

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

3. CHEVRE :

Pour CHÈVRE : $6! = 720$

Pour CHEVRE : $\dfrac{6!}{2} = 360$

4. HIPPOPOTAME : $\dfrac{11!}{2!3!} = 3\ 326\ 400$

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ donné.

1. Déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b + c = n$.
2. Déterminer le nombre de triplets $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $a + b + c = n$.

Correction :

1. On peut modéliser la situation par un schéma :

$$\underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{a \text{ points}} | \underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{b \text{ points}} | \underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{c \text{ points}}$$

Par exemple, $\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ représentera le triplet $(3, 2, 6)$,

et $||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ représentera le triplet $(0, 0, 11)$.

Il y a autant de triplets que de représentations avec n points ($\bullet$) et deux séparateurs ($|$).

Au total, il y en a $\dbinom{n+2}{2}$: le nombre de manières de choisir les deux places pour les séparateurs parmi $n + 2$.

Il y a $\dbinom{n+2}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + b + c = n$.

Dénombrements

2. On modélise de la même manière, mais les séparateurs ne peuvent plus être placés au début ou à la fin, ou se trouver au même endroit.

   $|\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ n'est pas envisageable (car on aurait $a=0$) ;

   $\bullet\bullet||\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ non plus (car on aurait $b=0$).

   Il s'agit donc de choisir deux emplacements parmi $n-1$ espaces (entre les points) pour y placer les séparateurs.

   Au total, il y a $\binom{n-1}{2}$ possibilités.

   Il y a $\binom{n-1}{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ triplets $(a,b,c)\in(\mathbb{N}^\star)^3$ tels que $a+b+c=n$.

Exercice 15 : On compte dans cet exercice les mots des trois lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, avec ou sans signification. Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. en tout ;
2. deux à deux distinctes ;
3. ayant exactement deux lettres identiques ;
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne ;
6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle ;
7. contenant au moins une consonne ;
8. contenant au moins une consonne et une voyelle.

Correction :

1. en tout :

   $26^3=17\ 576$
2. deux à deux distinctes :

   $\mathrm{A}_{26}^3=26\times25\times24=15\ 600$
3. ayant exactement deux lettres identiques :

   — 26 choix pour la lettre double ;
   — 25 choix pour la lettre simple ;
   — 3 choix de position pour la lettre simple.

   $26\times25\times3=1\ 950$
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne :
   — 6 choix pour la première lettre ;
   — 26 choix pour la deuxième lettre ;
   — 20 choix pour la troisième lettre.

   $6\times26\times20=3\ 120$

5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne :

   — $\binom{6}{2}$ choix pour les deux voyelles distinctes ;
   — 20 choix la consonne ;
   — Pour chacun de ces choix, $3!$ permutations.

   $\binom{6}{2} \times 20 \times 3! = 15 \times 20 \times 6 = 1\ 800$
6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle :

   — 20 choix pour la consonne doublée ;
   — 6 choix la voyelle ;
   — Pour chacun de ces choix, 3 possibilités de placer la voyelle.

   $20 \times 6 \times 3! = 15 \times 20 \times 3 = 360$
7. contenant **au moins** une consonne :

   Comptons les mots n'ayant aucune consonne : 6^3

   Les autres sont ceux ayant au moins une consonne.

   Il y en a : $26^3 - 6^3 = 17\ 360$
8. contenant **au moins** une consonne et une voyelle.

   Il y a
   — $20^3 = 8000$ mots n'ayant que des consonnes ;
   — $6^3 = 216$ mots n'ayant que des voyelles ;

   Aucun n'a été compté deux fois. Tous les autres ont au moins une consonne et une voyelle.

   Il y en a : $26^3 - 20^3 - 6^3 = 9\ 360$

Exercice 16 : On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes, chaque urne pouvant contenir de 0 à 6 boules. Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B, C. Déterminer le nombre de répartitions :

1. en tout ;
2. telles que l'urne A soit vide ;
3. telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide ;
4. telles qu'une urne soit vide, et une seulement ;
5. telles qu'aucune urne ne soit vide ;
6. telles qu'au moins une urne soit vide ;

Correction : Le résultat d'un tirage est noté (a, b, c), où $a, b, c \in [\![0, 6]\!]$ représentent le nombre de boules dans les urnes A, B, C.

1. **Nombres de répartitions en tout**

On cherche (a, b, c) de $[\![0, 6]\!]^3$ tels que $a + b + c = 6$.

$$\bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet\bullet$$

Il y en a $\dbinom{6+2}{2} = \dfrac{8 \times 7}{2} = 28$

28 répartitions en tout.

2. **telles que l'urne A soit vide :** On doit alors avoir $a = 0$.

   On cherche les couples $(b, c) \in [\![0, 6]\!]^2$ tels que $b + c = 6$.

   $$\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet$$

   Il y en a $\dbinom{7}{1} = 7$

   7 répartitions avec A vide.

3. **telles que l'urne A soit vide et soit la seule urne vide :**

   On a $a = 0$, et $b + c = 6$ avec b, c non nuls.

   $$\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet\bullet$$

   Il y en a $\dbinom{5}{1} = 5$

   5 répartitions avec A la seule urne vide.

4. **telles qu'une urne soit vide, et une seulement :**

   Si l'urne vide est A, 5 répartitions.

   Idem pour les autres.

   15 répartitions avec une et une seule urne vide.

5. **telles qu'aucune urne ne soit vide :**

   On cherche (a, b, c) tels que $a + b + c = 6$, avec a, b, c non nuls.

   $$\bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet\bullet$$

   Il y en a $\dbinom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$

10 répartitions sans aucune urne vide.

6. **telles qu'au moins une urne soit vide :**

   C'est l'ensemble complémentaire du précédent. Le nombre de répartitions est donc $28 - 10 = 18$

   18 répartitions telles qu'au moins une urne soit vide.

Exercice 17 :

1. Combien y a-t-il de façons de subdiviser une classe de 39 élèves en 15 groupes de 3 ?
2. Généraliser le résultat au nombre de partages de np objets en p groupes de n.

Correction :

1. On suppose dans un premier temps que les groupes sont dotés d'un numéro.
   - $\binom{39}{3}$ pour la constitution du groupe 1.
   - $\binom{36}{3}$ pour la constitution du groupe 2.
   - $\binom{33}{3}$ pour la constitution du groupe 3.
   - ...
   - $\binom{6}{3}$ pour la constitution du groupe 12.
   - $\binom{3}{3}$ pour la constitution du groupe 13.

   On obtient $\binom{39}{3}\binom{36}{3}\binom{33}{3}\cdots\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{39!}{36!3!}\frac{36!}{33!3!}\frac{33!}{29!3!}\cdots\frac{6!}{3!3!}\frac{3!}{0!3!} = \frac{39!}{3!^{13}}$ répartitions dans des groupes numérotés.

   Dans l'énoncé, il n'est pas précisé que l'ordre des groupes ait une importance. Il faut donc diviser le nombre obtenu par le nombre de permutations des numéros de groupe, soit 13!.

   Il y a donc $\frac{39!}{13!3!^{13}} \approx 2,5.10^{26}$ répartitions.
2. Il y a donc $\frac{(np)!}{p!n!^p}$ répartitions.

Exercice 18 : E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?
2. Combien sont réflexives ?
3. Combien sont symétriques ?

4. Combien sont antisymétriques ?
5. Combien sont réflexives et symétriques ?
6. Combien sont réflexives et antisymétriques ?

Correction :

1. **Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?**

   Une relation binaire est caractérisée par son graphe Γ qui est une partie de E^2. Il y en a autant que de parties de E^2.

   En posant $\mathrm{E} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$:

$\mathrm{E}\times\mathrm{E}$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1				$\star$
a_2	$\star$			
$\vdots$				
a_n				$\star$

   Card $(\mathrm{E}^2) = n^2$ donc Card $\mathscr{P}(\mathrm{E}^2)) = 2^{n^2}$

   Il y a donc 2^{n^2} relations binaires sur E.

2. **Combien sont réflexives ?**

$\mathrm{E}\times\mathrm{E}$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$\star$			$\star$
a_2		$\star$		
$\vdots$			$\ddots$	
a_n				$\star$

   La diagonale est incluse dans le graphe.

   Il ne reste plus que $n^2 - n$ choix.

   Il y a donc 2^{n^2-n} relations réflexives sur E.

3. **Combien sont symétriques ?**

$\mathrm{E}\times\mathrm{E}$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	2	2	2	2
a_2	1	2	2	2
$\vdots$	1	1	2	2
a_n	1	1	1	2

Dénombrements

— Diagonale : 2^n choix.

— Triangle supérieur strict : $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

— Triangle inférieur strict : 1 seule possibilité (symétrie).

$$\text{Il y a donc } 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ relations symétriques sur } \mathrm{E}.$$

4. **Combien sont antisymétriques ?**

— Diagonale : 2^n choix.

— Hors diagonale : on raisonne par couple (a_i, a_j) avec $i \neq j$.

	a_i	a_j
a_i		$\star$
a_j	$\star$	

Impossible

	a_i	a_j
a_i		
a_j	$\star$	

Possible

	a_i	a_j
a_i		$\star$
a_j		

Possible

	a_i	a_j
a_i		
a_j		

Possible

Il y a $\dfrac{n^2-n}{2}$ couples et donc $3^{\frac{n^2-n}{2}}$ choix hors diagonale.

$$\text{Il y a donc } 2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}} \text{ relations antisymétriques sur } \mathrm{E}.$$

5. **Combien sont réflexives et symétriques ?**

$$\text{Il y a donc } 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ relations réflexives et symétriques sur } \mathrm{E}.$$

6. **Combien sont réflexives et antisymétriques ?**

$$\text{Il y a donc } 3^{\frac{n^2-n}{2}} \text{ relations réflexives et antisymétriques sur } \mathrm{E}.$$

Exercice 19 : On se propose d'établir de deux manières différentes la formule dite de Vandermonde : quels que soient les entiers a, b, et n, on a : $\dbinom{a+b}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{a}{k}\dbinom{b}{n-k}$.

1. Trouver une interprétation combinatoire, en travaillant avec deux ensembles finis disjoints A et B de cardinaux respectifs a et b, et en posant $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
2. Démonstration algébrique :

   On considère le polynôme $(1+\mathrm{X})^{a+b} = (1+\mathrm{X})^a(1+\mathrm{X})^b$.

   Exprimer le coefficient en X^n de ce polynôme de deux manières différentes.

Correction : On se propose d'établir de deux manières différentes la formule dite de Vandermonde : quels que soient les entiers a, b, et n, on a :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

1. **On pose A et B disjoints tels que** $\begin{cases} \textbf{Card}\, \mathrm{A} = a \\ \textbf{Card}\, \mathrm{B} = b \end{cases}$.

   On pose $\mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

   On cherche le nombre de combinaisons de n éléments de E.

   — On a $\mathrm{Card}\, \mathrm{E} = \mathrm{Card}\, \mathrm{A} + \mathrm{Card}\, \mathrm{B}$ puisque A et B sont disjoints.

   Il y a donc $\binom{a+b}{n}$ combinaisons de n éléments de E.

   — On peut aussi les compter selon le nombre d'éléments de A :

   — 0 élément de A et n éléments de B : $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ possibilités.

   — 1 élément de A et $n-1$ éléments de B : $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ possibilités.

   — 2 éléments de A et n éléments de B : $\binom{a}{2}\binom{b}{n-2}$ possibilités.

   — ...

   — n éléments de A et 0 élément de B : $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ possibilités.

   Au total, $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ combinaisons de n éléments de E.

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

2. **On cherche le terme en X^n dans $(1+\mathrm{X})^{a+b}$.**

   — D'après la formule du binôme de Newton :

$$(1+\mathrm{X})^{a+b} = \sum_{p=0}^{a+b} \binom{a+b}{p} \mathrm{X}^p$$

   Le coefficient du terme en X^n est :

$$\binom{a+b}{n}$$

— En écrivant $(1+\mathrm{X})^{a+b} = (1+\mathrm{X})^a(1+\mathrm{X})^b$.

Dénombrements

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{X})^a(1+\mathrm{X})^b &= \left[\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}\mathrm{X}^i\right]\left[\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}\mathrm{X}^j\right]\\ &= \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b}\binom{a}{i}\binom{b}{j}\mathrm{X}^{i+j}\\ &= \sum_{i=0}^{a+b}\sum_{i\leqslant p\leqslant i+b}\binom{a}{i}\binom{b}{p-i}\mathrm{X}^p\\ &= \sum_{p=0}^{a+b}\left[\sum_{i=p-b}^{p}\binom{a}{i}\binom{b}{p-i}\right]\mathrm{X}^p\end{aligned}$$

Le terme en X^n est $\displaystyle\sum_{i=n-b}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Formule de VANDERMONDE [1]

[1]. **Alexandre-Théophile Vandermonde,** mathématicien français, 1735-1796.