Analyse asymptotique

I/ QCM

Une seule réponse exacte par question.

1. Si $x_n = 2^n$ et $y_n = n$ alors on peut dire que

   (a) ☐ $x_n = \mathrm{o}(y_n)$ (b) ☑ $y_n = \mathrm{o}(x_n)$ (c) ☐ $x_n \sim y_n$ (d) ☐ $x_n = \mathrm{O}(y_n)$

2. Quelle est la limite de $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}$?

   (a) ☐ 0 (b) ☑ $\frac{1}{2}$ (c) ☐ $\sqrt{n}$ (d) ☐ $+\infty$

3. Soit $u_n = \frac{\ln(2n)}{n}$. Alors u_n est équivalente à

   (a) ☐ 0 (b) ☐ $\frac{1}{n}$ (c) ☑ $\frac{\ln n}{n}$ (d) ☐ $\ln(2n)$

4. Soient (x_n) et (y_n) deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (a) ☐ $x+y$ (b) ☑ xy (c) ☐ $x-y$ (d) ☐ $\sqrt{xy}$

5. Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

   (a) ☐ $u_{n+1} - u_n \to 0$ (b) ☐ $u_{n+1} \sim u_n$ (c) ☑ $u_n \sim 1$ (d) ☐ $u_n = \mathrm{o}(n)$

6. Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que e^{u_n} est équivalent à e^n ?

   (a) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$ (c) ☑ $u_n = n + \mathrm{o}(1)$
   (b) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(n)$ (d) ☐ $u_n = n + \ln n + \mathrm{o}(\ln(n))$

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (a) ☐ (u_{n+1}) (b) ☑ $(1+u_n)$ (c) ☐ $2u_n$ (d) ☐ $\sqrt{u_n}$

8. Si $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

   (a) ☐ $1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ (c) ☐ $1 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
   (b) ☑ $1 + 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ (d) ☐ $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

9. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

   (a) ☐ 1/2 (b) ☐ 3 (c) ☐ 9 (d) ☑ 18

10. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{\sin x}$ on a besoin

(a) ☑ du DL_4 de cos et du DL_5 de sin
(b) ☐ du DL_5 de cos et du DL_5 de sin
(c) ☐ du DL_3 de cos et du DL_4 de sin
(d) ☐ du DL_3 de cos et du DL_5 de sin

II/ Cours

1. Donner un équivalent en 0 de $\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120}$.

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{7!}x^7.$$

2. Donner un équivalent en 0 de $\arctan(x) - x + \dfrac{x^3}{3}$.

$$\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{5}x^5.$$

3. Donner un équivalent en 0 de $e^{-x+x^2} - 1 + x$.

$$e^{-x+x^2} - 1 + x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2}x^2.$$

III/ Applications

1. Donner un $DL_5(0)$ de $\ln(\cos(x))$.

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

2. Montrer que $\dfrac{e^x - 1}{1 - \cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{x} + 1 + o(1)$.

Tout le savoir-faire repose sur l'ordre auquel mené les développements limités.

$$\frac{e^x - 1}{1 - \cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\dfrac{x^2}{2} + o(x^3)} \times \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

Analyse asymptotique

On factorise les facteurs par $\dfrac{x^2}{2}$ et x respectivement,

$$\begin{aligned}
&\underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{x^2} \times \frac{1}{1+\mathrm{o}(x)} \times \left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x} \times (1+\mathrm{o}(x)) \left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x} \times \left(1+\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right) = \frac{2}{x}+1+\mathrm{o}(1).
\end{aligned}$$

Analyse asymptotique

I/ QCM

Une seule réponse exacte par question.

1. Quelle est la limite de $\dfrac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$?

   (a) ☑ $+\infty$ (b) ☐ 2 (c) ☐ 1 (d) ☐ 2^n

2. Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $(2n + \sqrt{n})$?

   (a) ☐ $(\sqrt{n})$ (b) ☐ $(\ln n)$ (c) ☑ (n) (d) ☐ $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

3. Soit $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de u_n est

   (a) ☐ e^n (b) ☐ $\dfrac{e^n}{n}$ (c) ☐ $\dfrac{e^n}{n+1}$ (d) ☑ $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

4. Si x et y sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n + 1$ et $y_n \sim n$ alors

   (a) ☐ $x_n - y_n \sim 0$ (b) ☐ $x_n - y_n \sim 1$ (c) ☐ $x_n - y_n \to +\infty$

   (d) ☑ on ne peut pas donner d'équivalent de $x_n - y_n$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle équivalente à $(n+1)$. Laquelle des suites suivantes n'est pas équivalente à u_n ?

   (a) ☐ $\dfrac{n^2+1}{n}$ (b) ☐ n (c) ☑ $\ln(1 + n)$ (d) ☐ $n - 1$

6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite (u_n^n)

   (a) ☐ tend aussi vers 1
   (b) ☐ converge vers 0
   (c) ☐ diverge vers $+\infty$
   (d) ☑ est une forme indéterminée.

7. Quelle est la limite de $n^{1/n}$?

   (a) ☐ 0 (b) ☑ 1 (c) ☐ e (d) ☐ $+\infty$

8. En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1 + x} - 1$ est équivalente à

   (a) ☑ $\dfrac{x}{3}$ (b) ☐ $\sqrt[3]{x}$ (c) ☐ x (d) ☐ $3x$

9. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 en 1 est

   (a) ☐ $f(1)+xf'(1)+\dfrac{x^2}{2}f''(1)$

   (b) ☐ $(x-1)\left(f(1)+xf'(1)+\dfrac{x^2}{2}f''(1)\right)$

   (c) ☑ $f(1)+(x-1)f'(1)+\dfrac{(x-1)^2}{2}f''(1)$

   (d) ☐ $f(x)+(x-1)f'(x)+\dfrac{(x-1)^2}{2}f''(x)$

10. La limite en 0 de $\dfrac{\tan(x)-x}{\sin(x)-x}$ vaut

    (a) ☑ -2 (b) ☐ 0 (c) ☐ 1 (d) ☐ $+\infty$

II/ Cours

1. Donner un équivalent en 0 de $\cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}$.

$$\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\underset{x\to0}{\sim}-\frac{1}{6!}x^6.$$

2. Donner un équivalent en 0 de $\tan(x)-x-\dfrac{x^3}{3}$.

$$\tan(x)-x-\frac{x^3}{3}\underset{x\to0}{\sim}\frac{2}{15}x^5.$$

3. Donner un équivalent en 0 de $\ln(1-x+x^2)+x$.

$$\ln(1-x+x^2)+x\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2}x^2.$$

III/ Applications

1. Donner un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\arctan(x)}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\arctan(x)}&\underset{x\to0}{=}\sqrt{1+x+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\\&\underset{x\to0}{=}1+\frac{1}{2}\left(x+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-\frac{1}{8}\left(x+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^2\\&\underset{x\to0}{=}1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

$$\frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sin\left(-\dfrac{x^3}{6}\right)}{\dfrac{1}{2}x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\dfrac{x^3}{6}}{\dfrac{1}{2}x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{3} \text{ donc } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x)-x)}{\sqrt{1+x^3}-1} = -\frac{1}{3}.$$