Polynômes et analyse asymptotique

1. **Polynômes**
   - Racine d'un polynôme. Caractérisation par la factorisation.
   - Un polynôme ayant plus de racines que son degré est nul.
   - Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation avec les dérivées.
   - Factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
   - Relation entre la somme des racines et les coefficients de P et relation entre le produit des racines et les coefficients de P.

2. **Analyse asymptotique**
   - Négligeabilité : définition par la limite du quotient. Notation $\ll$ ou o. Nouvelles croissances usuelles.
   - Propriétés algébriques des o : transitivité, somme, produit, absorption des constantes, inverse.
   - Équivalence : définition par la limite du quotient. Lien avec o.
   - Deux équivalents ont même nature, même limite (lorsqu'elle existe) et même signe (lorsqu'il est fixe).
   - Théorème d'encadrement des équivalents.
   - Opérations algébriques sur les équivalents : produit, élévation à une puissance fixe, passage à l'inverse notamment, passage à la valeur absolue. Changement de variables. Équivalents usuels. **Interdit de sommer ou de composer (à gauche) les équivalents.**
   - Développements limités en 0, en x_0. Unicité, troncature. Cas des fonctions paires ou impaires en 0.
   - DL et continuité/dérivabilité. Toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n.
   - DL usuels. Somme, produit, composée et quotient de DL.
   - Primitivation des développements limités. Théorème de Taylor-Young.
   - Application : recherche de limites, d'asymptote, de tangente, position par rapport à la tangente au voisinage, condition nécessaire, condition suffisante sur un DL pour obtenir un extremum.

Questions de cours possibles [1] :

1. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
2. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise P. (on admettra l'initialisation)
3. ($\star$) α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
4. ($\star$) Théorème de Taylor pour les polynômes.
5. Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels *i.e.* connaître la forme factorisée d'un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
6. Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Contre-exemple à citer au-delà.
7. Énoncer le lemme (admis ici) sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.
8. Théorème de Taylor-Young.
9. ($\star$) Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 0.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.