

Dans ce chapitre, on introduit certains outils permettant de mieux comprendre le comportement des suites ou fonctions au voisinage de l'infini (pour les suites), ou d'un point quelconque a de $\overline{\mathbb{R}}$ (pour les fonctions).

Ces outils permettent d'affiner la notion de limite, notamment dans le cas d'une limite nulle ou infinie : ils nous permettront d'exprimer le fait qu'une suite converge plus rapidement vers 0 qu'une autre, ou sensiblement à la même vitesse.

Nous affinerons ensuite l'étude locale d'une fonction au voisinage d'un point. L'étude des dérivées permet d'approcher localement une courbe par une droite (la tangente). Dans ce chapitre, nous généralisons ce point de vue en montrant comment les *formules de Taylor* permettent d'approcher une courbe au plus près (localement) par une courbe polynomiale de degré donné.

Nous étudierons ensuite la qualité de cette approximation, en majorant (localement pour l'instant) l'erreur faite en approchant la courbe par cette courbe polynomiale.

C'est l'objet de l'étude des restes de Taylor. Nous terminerons par l'application de ces approximations polynomiales au calcul de limites, et par quelques outils permettant de calculer ces approximations sans avoir à revenir à la formule de Taylor (et donc au calcul bien fastidieux de toutes les dérivées successives).

Il s'agit du calcul des *développements limités*.

CONTENU

I	Négligeabilité.	2
I.1	Introduction.	2
I.2	Opérations sur les petits o	7
II	Développements limités.	10
II.1	Introduction.	10
II.2	Primitivation des développements limités.	15
II.3	Formule de Taylor-Young.	18
II.4	Dérivation des développements limités.	24
II.5	Développements usuels.	25
II.6	Opérations sur les développements limités.	28
III	Équivalence.	36
III.1	Introduction.	36
III.2	Application : Série harmonique et constante d'Euler.	41
III.3	Opérations sur les équivalents.	42
IV	Domination.	46
V	Exemples et Applications.	48
V.1	Recherche d'un équivalent.	48

V.2	Calculs de limites	49
V.3	Position locale d'une fonction par rapport à une tangente	49
V.4	Développement asymptotique	51
V.5	Asymptotes et limite en $+\infty$	52

Dans ce chapitre, la lettre I qui servira d'ensemble de définition désignera une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Soient deux fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{I}$.

Nous supposons presque toujours que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a $\mathcal{V}(a) \setminus \{a\}$, ou qu'elles s'annulent toutes les deux en ce point.

Dans la même idée, on considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Il s'agit ici de comparer les deux fonctions au voisinage de a ou les deux suites à partir d'un certain rang *i.e.* au voisinage de l'infini.

Pour cela, on forme leur rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ ou $\frac{u_n}{v_n}$ et on regarde ce qu'il se passe lorsque $x \rightarrow a$ ou $n \rightarrow +\infty$ respectivement.

Trois cas intéressants se présentent alors :

1. f est dominée par g .
1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. f est négligeable devant g .
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. f et g sont équivalentes.
3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes.

I/ Négligeabilité

I.1 Introduction

Définition 1 (Négligeabilité) :

Fonctions : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , noté $f(x) = o(g(x))$ ou $f = o(g)$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et on lit :

« f est un petit o de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n = o(v_n)$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et on lit :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un petit o de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

Remarques :

- La définition de négligeabilité est, en fait, plus générale :

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a et une fonction $\varepsilon : \mathbb{I} \cap \mathcal{V}_a \mapsto \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{I} \cap \mathcal{V}_a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Cependant, dans la situation où nous nous sommes placés *i.e.* « g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$ », ces deux définitions sont alors équivalentes.

- Dire qu'une fonction ou une suite est un $o(1)$ au voisinage d'un point a ou de $+\infty$ signifie que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1} = 0$ *i.e.* un $o(1)$ est une fonction ou une suite de limite nulle en a ou $+\infty$ respectivement.

Exemples 1 :

- $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, o\left(\frac{1}{x^k}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et $o\left(\frac{1}{n^k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, o(x^k) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$.
- Soit $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors $f \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ et $f \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^6)$.

- L'intérêt de cette notation est qu'on peut l'utiliser dans les calculs. On peut, par exemple, considérer $u_n = v_n + o(w_n)$. C'est notamment pratique pour formaliser des approximations.

Ainsi, dire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

signifie que pour n assez grand, u_n est à peu près égal à $2 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}$, et que l'erreur faite en approchant u_n par cette expression est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$.

Le terme $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ contrôle l'erreur et exprime que ce qu'il reste est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Il est donc inutile de l'écrire et on dira souvent que le reste est « absorbé » par le o .

Exemples 2 :

- $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$ et $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.
- $\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4)$.
- $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$.
- $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Les petits o sont la formalisation définitive des croissances comparées.

« Certains infinis sont plus infinis que d'autres,
certains zéros sont plus zéros que d'autres. »

Dire que $x^2 = o(x^4)$, c'est affirmer l'immensité de x^4 par rapport à x^2 lorsque x est grand, et dire que $x^4 = o(x^2)$, c'est affirmer l'infime petitesse de x^4 par rapport à x lorsque x est petit.

Un peu d'histoire : On doit la notation « petit/grand o » à Landau^[1] et Bachmann^[2]

Il suffit alors de relire les derniers chapitres pour débiter notre formulaire des relations de négligeabilité à connaître :

Théorème 1 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de $+\infty$) :

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha = o(x^\beta)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$.
- Si $0 < a < b$ alors $a^x = o(b^x)$.
- Si $a > 1$ alors $x^\alpha = o(a^x)$.

En particulier, si $\alpha > 0$, alors $x^\beta = o(e^{\alpha x})$.

Exemple 3 : Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_q x^q$ ($p \geq q$) est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) = a_p x^p + o(x^p) \quad \text{et} \quad P(x) = a_q x^q + o(x^q).$$

De même, au voisinage de 0, on a :

Théorème 2 (Croissances comparées usuelles des fonctions au voisinage de 0) :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta = o(x^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha = o((\ln x)^\beta)$ ou $(\ln x)^\beta = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

[2]. **Edmund Georg Hermann Landau** (Berlin, 14 février 1877 - Berlin, 19 février 1938) est un mathématicien allemand, auteur de 253 publications mathématiques, en grande partie sur la théorie des nombres.

Landau étudie les mathématiques à l'université de Berlin et reçoit son doctorat en 1899 et son habilitation (la qualification post-doctorale requise dans les universités allemandes) en 1901. Il enseigne à l'université de Berlin de 1899 à 1909 et conservera sa chaire à l'université de Göttingen de 1909 jusqu'à son expulsion de l'université par le régime nazi en 1933 du fait qu'il est juif. Dès lors, il ne donnera plus aucun cours dans son pays.

En 1903, Landau donne une démonstration beaucoup plus simple que celle connue alors du *théorème des nombres premiers* et présente ensuite le premier traitement systématique de la théorie analytique des nombres. Il fait également d'importantes contributions en analyse complexe.

Hardy a écrit que personne ne fut jamais plus passionnément dévoué aux mathématiques que Landau. Ceci est amplement mis en évidence par ses livres sur les fondations axiomatiques de l'analyse et sur la théorie des nombres. Il est resté célèbre notamment pour la diffusion et l'usage de notations qui portent son nom : les notations de Landau (O , o , Ω , Ω_+ , Ω_- , $\Omega_\pm$), qui ont en fait en partie été inventées par Bachmann (O), et par Hardy et Littlewood (Ω).

On peut cependant lui attribuer la paternité du symbole o .

[2]. **Paul Bachmann** (22 juin 1837 - 31 mars 1920) est un mathématicien allemand.

Bachmann est à l'origine du symbole grand O (utilisé en informatique plus tard) pour désigner la complexité d'un algorithme.

Théorème 3 (Croissances comparées usuelles des suites) :

- Les croissances comparées usuelles des fonctions en $+\infty$ peuvent bien sûr être exprimées en termes de suites. Il suffit de remplacer x par n .
- $\forall a \in \mathbb{R}, a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!).$

Nous avons introduit la notation petit o sous sa forme la plus élémentaire - mise en relation de deux fonctions ou de deux suites - mais on la rencontre en réalité le plus souvent sous la forme suivante :

$$f \underset{x \rightarrow a}{=} g + o(g) \text{ pour les fonctions et } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n) \text{ pour les suites.}$$

Ce qui est affirmé ici, c'est que $f = g + \varepsilon$ avec $\varepsilon \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ ou que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ i.e. que f est globalement égale à g modulo des termes négligeables devant g au voisinage de a ou devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$. Cette écriture sera à la base de la relation d'équivalence définie plus loin.

Remarque : Partons de l'affirmation $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$, selon laquelle grosso modo, pour x proche de 0, $e^x \simeq 1 + x + x^2$.

Cette approximation n'a de sens que si l'on peut y mesurer l'erreur commise. En l'occurrence, ici $e^x \simeq 1 + x + x^2$ à un $o(x)$ près.

C'est un peu comme quand on dit que $\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près.

Vous répondrez naturellement « Pourquoi pas seulement 3,14 puisqu'on raisonne à 10^{-2} près ? » Et vous aurez raison. Raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2} .

Ainsi, l'approximation $\pi \simeq 3,14$ à 10^{-2} près est aussi précise que l'approximation $\pi \simeq 3,141592$ à 10^{-2} près, quand bien même on écrit deux décimales correctes dans un cas et six dans l'autre.

Il se passe la même chose avec les petits o . Comme $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, la quantité x^2 est inutile dans la relation $e^x = 1 + x + x^2 + o(x)$ donc nous pouvons lui couper la tête, tronquer, et écrire

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Cette nouvelle proposition n'est ni plus ni moins précise que la précédente mais elle est plus lisible et plus économe.

Moralité : Tout petit o est un niveau de précision, un seuil de visibilité. De vous-mêmes, à chaque instant, faites le ménage, coupez la tête de tous les invisibles !

Attention à l'abus de notation que l'on fait en écrivant $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

Il ne s'agit pas vraiment d'une égalité, et c'est à prendre plus dans le sens d'une appartenance :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ».

Si on garde en tête l'idée qu'il s'agit d'une appartenance, on évite un certain nombre d'erreurs que peut véhiculer la notation.

Par exemple :

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ n'implique pas $u_n = u'_n$, ce qui est assez troublant formellement pour une égalité.
- On ne peut pas simplifier des o : $u_n + o(w_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(w_n)$ n'implique pas $u_n = v_n$.

ATTENTION

Exercice 1 : Soient $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Simplifier les expressions suivantes avec un degré de précision de l'ordre du $o(x)$:

1. $\ln(1+x) + \sin(x)$.

2. $\ln(1+x) - \sin(x)$.

Théorème 4 (Limites et petits o) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

Alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$.

En particulier, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff f \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1)$.

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.

Preuve : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \ell}{1} = 0 \iff f - \ell \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$
 $\iff f \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$.

I.2 Opérations sur les petits o

On rappelle que, dans toute la suite :

- chaque fois que l'on écrira $f = o(g)$ on sous-entendra $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de a ou $g(a) = 0$ mais dans ce cas $f(a) = 0$ aussi,
- de même, $u_n = o(v_n)$ sous-entendra $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Proposition 5 (Les petits o absorbent les constantes multiplicatives) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonctions : Si $f = o(g)$ alors $f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$.

Suites : Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(\lambda v_n)$ et $\lambda u_n = o(v_n)$.

Preuve : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ alors, pour $\lambda \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\lambda g(x)} = 0$.

Exemple 4 : Si on admet l'égalité $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{1}{n}} &= 2 + \frac{2}{n} + 2o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Proposition 6 (La somme de deux petits o est un petit o) :

Fonctions : Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f \pm g = o(h)$.

Suites : Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

ATTENTION

$o(h) - o(h) \neq 0! \dots$

$x = o(x^3)$ et $x^2 = o(x^3)$ mais $x - x^2 = o(x^3) \neq 0$.

Preuve : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \pm g(x)}{h(x)} = 0$.

Exemple 5 : Avec $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) + \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 2o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

Proposition 7 (Un petit o d'un petit o est un petit o) :

Fonctions : Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ et $g \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$ alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$.

Suites : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

En d'autres termes, la relation « être négligeable » est transitive.

À part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de négligeabilité se comporte à peu près comme une relation d'ordre stricte.

Preuve : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 0,$$

d'après les théorèmes sur les produits de limites.

Exemple 6 : Prenons l'égalité $e^{\frac{1}{n^2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors :

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{n^2}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On dit que l'on a *tronqué* à l'ordre $\frac{1}{n}$.

Proposition 8 (Les petits o sont compatibles avec le produit) :

Fonctions : Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$ et $g \underset{x \rightarrow a}{=} o(k)$ alors $fg \underset{x \rightarrow a}{=} o(hk)$.

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ alors $fh \underset{x \rightarrow a}{=} o(gh)$.

Suites : Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t_n)$ alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n t_n)$.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n w_n)$.

Preuve : D'après les théorèmes sur les limites de produits de limites finies, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{h(x)k(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{k(x)} \dots$$

Comme h est non nul dans un voisinage de a , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{f(x)} \cancel{h(x)}}{\cancel{g(x)} \cancel{h(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \dots$$

En particulier, $x^2 \times o(x) = o(x^3)$, $x \times o\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)$, ...

Exemple 7 : Reprenons les égalités $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ et $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sin(x) \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1+x+o(x))(x+o(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x^2 + x \times o(x) + x \times o(x) + o(x) \times o(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + \underbrace{x^2 + 2x \times o(x) + o(x^2)}_{\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)} = x + o(x). \end{aligned}$$

Proposition 9 (Les petits o sont compatibles avec la composition) :
à droite et les suites extraites

Fonctions : Soient $b \in \mathbb{R}$ et φ une fonction définie sur un voisinage de b à valeurs dans I .

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ et $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \rightarrow b}{=} o(g \circ \varphi)$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_{\varphi(n)})$.

On peut donc composer à droite par une fonction φ ce qui revient à changer la variable x en une autre $u = \varphi(x)$.

Composer à gauche reviendrait à changer la fonction. Cela ne peut être possible par essence.

Preuve : Comme $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, d'après les théorèmes sur les limites de composées, on a :

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u)}{g(u)} = 0 \dots$$

Exemple 8 : $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ alors $\sqrt{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

De même, comme $2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^n)$ alors $2^{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(3^{n^2})$.

En pratique, pour $a \neq \pm\infty$, ce résultat permet en particulier de ramener par la translation $\varphi : x \mapsto x + a$ toute relation $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ au voisinage de a en une relation

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(g(a+h)) \text{ au voisinage de } 0.$$

Il est formellement interdit de composer une relation de négligeabilité par la gauche.

ATTENTION

Par exemple, $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln x} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \ln(\sqrt{x}) \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\ln x)$.

II/ Développements limités

II.1 Introduction

Nous cherchons dans ce paragraphe à approcher les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous allons, par exemple, montrer que :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

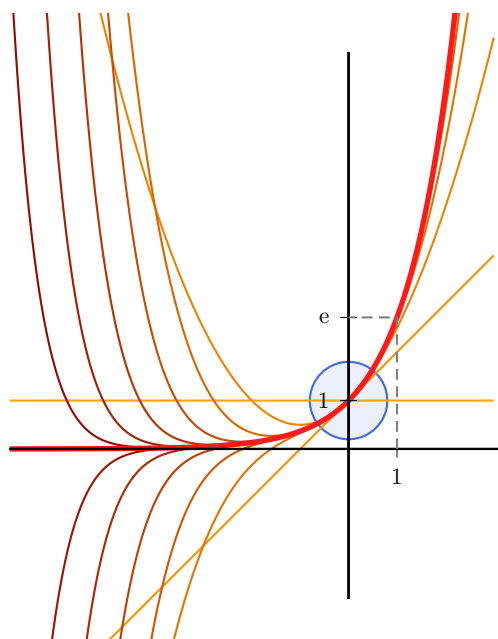


Figure XXI.1 – Courbe représentative de $x \mapsto \exp(x)$ approchée par des fonctions polynomiales au **voisinage de 0**.

Ce résultat signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction

$$x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Pour la même raison, comme $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

La fonction polynomiale de degré la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x$, autrement dit, sa tangente en 0. Rien d'étonnant !

Définition 2 (Développement limité) : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un *développement limité à l'ordre n au voisinage de a* , noté aussi un $DL_n(a)$, s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

L'expression polynômiale $P(x - a) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$ est appelé la *partie régulière* du développement limité.

Plus n est grand, plus la quantité $(x - a)^n$ est petite au voisinage de a . Du coup, plus n est grand, plus l'approximation de f obtenue au voisinage de a est précise :

L'ordre n du $o((x - a)^n)$ contrôle l'erreur de l'approximation.

Remarques :

- On note toujours $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients réels.
- On a $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Dans la pratique on ne développe jamais les termes $(x - a)^k$ ce qui n'aurait aucun intérêt.
- Le reste du $DL_n(a)$ i.e. $o((x - a)^n)$, donne l'ordre du développement et peut aussi se mettre, suivant les besoins, sous la forme $(x - a)^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples 9 :

— $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) : DL_1(0)$ de $\sin(x)$, sa partie régulière est x .

— Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0$ alors $e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

C'est un $DL_2(0)$ de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ au voisinage de 0 dont la partie régulière est nulle.

Exercice 2 : Comment s'écrit le développement limité d'ordre $k \in \mathbb{N}$ d'un polynôme au voisinage de 0 ?

Correction : Il suffit de le tronquer au degré k , la somme des termes suivants (s'ils existent) est alors un $o(x^k)$ au voisinage de 0.

Exercice 3 (DL de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0) : Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \iff \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x}{1-x} \times x^n$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0 \iff \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ entraîne $\frac{x}{1-x} \times x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

On obtient :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n \times o(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

Méthode 1 (Translation et troncature) :

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0.

Précisément, si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors, après composition à droite par la fonction $x \mapsto x+a$, on obtient :

$$f(x+a) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

- On peut tronquer un développement limité d'ordre n en un développement limité à un ordre inférieur $m \leq n$ en oubliant les termes de degré compris en $m+1$ et n .

Plus précisément, si on a un développement limité de f à l'ordre n i.e. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ alors, pour $m \leq n$, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^m + o((x-a)^m)$ est un développement limité de f à l'ordre m .

Théorème 10 (Unicité du développement limité) :

Si f admet un développement limité au voisinage d'un réel a alors celui-ci est unique.

Preuve : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$. Supposons que f possède deux développements limités distincts à l'ordre n au voisinage de a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Notons p le plus petit indice pour lequel $a_p \neq b_p$. Après simplification et troncature à l'ordre p , on a :

$$a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \underset{x \rightarrow a}{=} b_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \implies a_p - b_p \underset{x \rightarrow a}{=} o(1).$$

Donc $a_p = b_p$ ce qui contredit l'hypothèse sur p .

Conclusion, $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $a_p = b_p$ et le développement limité est unique.

Corollaire 10.1 (Parité/Imparité) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $0 \in I$ et I est un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang impair sont nuls.
- Si f est impaire et possède un développement limité au voisinage de 0, alors les coefficients de rang pair sont nuls.

Preuve : L'unicité du développement limité est la clé de cette démonstration.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ f(-x) &\underset{x \rightarrow a}{=} a_0 - a_1x + a_2x^2 + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n) \end{aligned}$$

- Si f est paire alors $f(x) = f(-x)$ entraîne

$$\forall p \in \left[0; \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right], a_{2p+1} = -a_{2p+1} \implies a_{2p+1} = 0.$$

- Si f est impaire alors $f(x) = -f(-x)$ entraîne

$$\forall p \in \left[0; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right], a_{2p} = -a_{2p} \implies a_{2p} = 0.$$

Exemple 10 : Reprenons l'exercice (3), en composant à droite par $x \mapsto -x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + o((-x^2)^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

Tous les coefficients de rangs impairs sont nuls.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème 11 (Développement limité et continuité/dérivabilité) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- f est continue en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a .

Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

- f est dérivable en a si, et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .

Précisément, dans ce cas : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$.

En reconnaissant la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, les développements limités prolongent ainsi naturellement la notion de tangente à la courbe de f en un point a .

Preuve : Ce résultat a déjà été démontré dans le chapitre sur la dérivabilité. Il suffit ici de traduire les définitions :

- f est continue en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 $\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$
 $\iff f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$
 $\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o((x - a)^0)$
 $\iff f$ admet un $DL_0(a)$.
- f est dérivable en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$
 $\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{=} f'(a) + o(1)$
 $\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$
 $\iff f$ admet un $DL_1(a)$.

Remarque : Dans un développement limité de f au voisinage de a , le coefficient d'ordre 0 est TOUJOURS $f(a)$ et celui d'ordre 1, TOUJOURS $f'(a)$.

Le théorème (11) ne va pas plus loin et il existe des fonctions admettant des développements limités d'ordre supérieur à deux au voisinage d'un point a sans être deux fois dérivables en ce point.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme la fonction $\sin$ est bornée,

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2). \quad (\text{XXI.1})$$

Ainsi, f admet le développement limité à l'ordre 2 en 0 suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2).$$

Or, il est facile de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, avec

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1). \quad (\text{XXI.2})$$

ATTENTION

Avec (XXI.1), f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et ce prolongement est également dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ d'après (XXI.2).

Or, $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

La fonction f , bien qu'admettant un développement limité à l'ordre 2, n'est pas deux fois dérivable en 0.

Dans la même idée, comme $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité en 0 égal à $0 + 0x + o(x)$ donc se prolonge en 0 en posant $g(0) = 0$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais sa dérivée dont l'expression est donnée par $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ n'est pas continue en 0 donc g' n'est pas continue en 0 et g pas $\mathcal{C}^1$.

Les équivalences du théorème (11) s'arrêtent à $f \in \mathcal{D}^1$ et même pas $\mathcal{C}^1$.

II.2 Primitivation des développements limités

On commence par un lemme simple avant la version plus générale :

Lemme 1 :

Soient $g \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n)$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x - a)^{n+1})$.

Preuve : Soit $x \in I \setminus \{a\}$. La fonction g est continue sur $[a; x]$ et dérivable sur $]a; x[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_x \in]a; x[, \quad g(x) - g(a) = g'(c_x)(x - a).$$

Or, $c_x \in]a; x[\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} c_x = a$.

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g(x) - g(a)}{(x - a)^{n+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{g'(c_x) \cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)^n} (x-a)} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \times \underbrace{\left| \frac{c_x - a}{x - a} \right|^n}_{\leq 1} = 0.$$

i.e.

$$g(x) - g(a) = o((x - a)^{n+1}).$$

Théorème 12 (Primitivation des développements limités) :

Soient $f \in \mathcal{D}(I; \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n)$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ alors f possède un développement limité à l'ordre $n + 1$ au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1} + o((x - a)^{n+1}).$$

On peut donc toujours primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

On prendra garde au fait que le premier coefficient est alors $f(a)$.

Preuve : La fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1}$ est dérivable sur I de dérivée la fonction $g' : x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k$ et on a, par hypothèse, $g'(x) = o((x - a)^n)$.

D'après le **lemme (1)**, on a donc $g(x) = o((x - a)^{n+1})$ i.e. le résultat voulu.

Exemple 11 (DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0) : Comme $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$, alors $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ par composition à droite par $x \mapsto -x$ puis, par primitivation

[3]. ou $[x; a]$ et $]x; a[$ respectivement.

et avec $\ln(1+0) = \ln 1 = 0$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n). \quad (\text{Remarque : } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1})\end{aligned}$$

Exercice 4 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

À partir de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ trouver un DL_5 au voisinage de 0 de $\tan(x)$.

Correction : Comme $\tan(0) = 0$, on a

$$\tan(x) = 0 + o(1)$$

Comme $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, en primitivant :

$$= x + o(x) = x(1 + o(1))$$

La même relation donne encore :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + x^2(1 + o(1))^2 = 1 + x^2 + o(x^2)$$

En primitivant :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) &= 1 + x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)^2 = 1 + x^2 \left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \\ \tan(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) = x(\dots + o(x^4))\end{aligned}$$

Remarque : Les coefficients de rang pair sont tous nuls puisque la fonction $\tan$ est impaire.

Cette méthode peut être menée à tout ordre et se généralise à toute fonction solution d'une équation différentielle comme $\exp$, $\cos$, ...

Pour exp solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ e^0 = 1 \end{cases}$, on trouverait successivement :

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1) &&= (e^x)' \\ e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x) &&= (e^x)' \\ e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) &&= (e^x)' \\ e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + o(x^3) &&= (e^x)' \\ &\vdots && \\ e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) &&= (e^x)' \end{aligned}$$

II.3 Formule de Taylor-Young

Il est grand temps de se demander sous quelles conditions une fonction f admet un développement limité : Le théorème de Taylor^[4]-Young^[5] va y répondre.

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young) :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a et, plus précisément :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Le polynôme P_n défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$ est appelé *polynôme de Taylor* d'ordre n associé à f au point a .

Vocabulaire : On emploie parfois le terme *série de Taylor* associée à f en a pour désigner la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve : La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre n .

Pour $n = 0$, on sait déjà que f continue admet un développement limité à l'ordre 0

Supposons la relation vraie au rang n et soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Sa dérivée f' est donc de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

D'après le **théorème (12)** de primitivation des développements limités, on a aussitôt :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire. Initialisée, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[4]. **Brook Taylor** est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731.

Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.

Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « *calcul de différences finies* », inventa l'*intégration par parties*, et découvrit les séries appelées « *développements de Taylor* ». Ses idées furent publiées dans son livre de 1715, *Methodus incrementorum directa et inversa*.

La première mention par Taylor de ce qui est appelé aujourd'hui *théorème de Taylor* apparaît dans une lettre que ce dernier écrivit à **Machin** le 26 juillet 1712. Dans cette lettre, Taylor explique clairement d'où lui est venue cette idée, c'est-à-dire d'un commentaire que fit Machin au Child's Coffeehouse, utilisant les « séries de **Sir Isaac Newton** » pour résoudre un problème de **Kepler**, et utilisant également « les méthodes du Dr Halley ^[6] pour extraire les racines » d'équations polynomiales.

La publication de 1715 donne deux versions du « *théorème de Taylor* ». Dans la première version, le théorème apparaît dans la Proposition 11 qui est une généralisation des méthodes de Halley d'approximation de racines de l'équation de Kepler, ce qui allait bientôt devenir une conséquence des séries de **Bernoulli**. C'est cette version qui a été inspirée par les conversations du Coffeehouse décrites précédemment. Dans la seconde version se trouve le Corollaire 2 de la Proposition 7 et qui est une méthode pour trouver davantage de solutions des équations fluxionnelles dans les séries infinies. Taylor était le premier à découvrir ce résultat.

[5]. **Thomas Young** (13 juin 1773 à Milverton (Somerset) - 10 mai 1829 à Londres), est un physicien, médecin et égyptologue britannique.

Son excellence dans de nombreux domaines non reliés fait qu'il est considéré comme un polymathe, au même titre par exemple que **Léonard de Vinci**, **Gottfried Wilhelm Leibniz** ou **Francis Bacon**. Son savoir était si vaste qu'il fut connu sous le nom de *phénomène Young*.

Il exerça la médecine toute sa vie, mais il est surtout connu pour sa définition du module de Young en science des matériaux et pour son expérience des fentes de Young en optique, dans laquelle il mit en évidence et interpréta le phénomène d'interférences lumineuses.

Il s'intéressa également à l'égyptologie en participant à l'étude de la **pierre de Rosette**.

[6]. Celui de la comète oui !

Remarques et commentaires importants

- Le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de a n'est rien d'autre que l'expression de la droite tangente à la courbe de f en a .

Les développements de Taylor sont donc à voir comme une généralisation polynomiale de la droite tangente, aux ordres supérieurs.

On pourra notamment vérifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

- La formule de Taylor-Young ne donne qu'une information locale au voisinage de a .

Pour un comportement global, il est nécessaire d'estimer l'erreur faite en approchant f par son développement de Taylor $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ au voisinage de a . Nous répondrons à cette question en fin d'année avec un résultat connu sous le nom de « formule de Taylor-Lagrange ».

ATTENTION

En aucun cas, elle ne peut être utilisée pour une étude globale mais localement il s'agit de la meilleure approximation par un polynôme de degré au plus n .

Même si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I , on n'est pas assuré que le développement de Taylor tende vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont nulles en 0 *i.e.* son développement limité en 0 à tout ordre est nul sans que la fonction f ne le soit ($f(1) = \frac{1}{e}$).

- Le théorème (13) est avant tout un théorème d'existence des développements limités.

Sur cette question, nous disposons à présent de deux équivalences et d'une implication (seulement) :

f continue	$\Leftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 0.
f dérivable	$\Leftrightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre 1.
f de classe $\mathcal{C}^n$	$\Rightarrow$	Existence d'un développement limité à l'ordre n .
f de classe $\mathcal{C}^\infty$	$\Rightarrow$	Existence d'un développement limité à tout ordre.

ATTENTION

La réciproque n'est pas du tout vraie, il existe des fonctions qui admettent par exemple des développements limités à tout ordre en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Par exemple, la fonction définie en (XXI.1) par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{XXI.3})$$

admet un développement limité (nul) à l'ordre 2 en 0 sans être de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de 0.

- Retenez aussi que l'existence d'un DL à l'ordre n au voisinage de a n'implique pas l'existence de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en a comme pour la fonction définie en (XXI.3).

- Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young. Je le redis, le lien entre existence du DL_n et de la dérivée $n^{\text{ème}}$ n'est vrai que pour les tous petits ordres $n = 0$ et $n = 1$ et ça s'arrête là !

Exercice 5 (DL de e^x au voisinage de 0) :

1. Donner le développement limité de e^x au voisinage de 0.
2. En déduire ceux de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$.

Correction :

1. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a :

$$(e^x)^{(n)}(0) = (e^x)(0) = 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

2. Les fonctions ch et sh sont respectivement les parties paires et impaires de l'exponentielle. D'où :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}). \\ \text{sh}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

Exemple 12 (DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0) : Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $] -1; +\infty[$ et, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est :

$$x \mapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a alors :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Remarques :

— Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dans ce cas et ce cas seulement, avec l'hypothèse que $\binom{\alpha}{k} = 0$ si $k > \alpha$, le développement limité de $(1+x)^\alpha$ lorsque x tend vers 0 est tout simplement le développement de la formule du binôme.

Conclusion : Quand vous cherchez un développement limité de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 0, utilisez simplement la formule du binôme :

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 = 1 + 5x + 10x^3 + o(x^3).$$

— Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, le développement limité de $\frac{1}{(1+x)^{-\alpha}}$ est, au signe près, la dérivée terme à terme $-(\alpha+1)^{\text{ème}}$ de celui de $\frac{1}{1+x}$ *i.e.* on peut donc dériver une série géométrique.

De manière « plus synthétique » : $\frac{1}{(1+x)^{-\alpha}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha-1}{k-\alpha-1} x^k + o(x^n).$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on généralise les coefficients binomiaux en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

On réécrit alors le développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n).$$

Exercice 6 (DL de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ au voisinage de 0) :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\cos^{(k)}(0)$ et $\sin^{(k)}(0)$.
2. En déduire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions cosinus et sinus.

Correction :

1. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, donc :

$$\begin{cases} \cos^{(2k)}(0) &= (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin^{(2k)}(0) &= 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k \end{cases}$$

2. D'après la question préliminaire, on a alors :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

Remarque : On retrouve les effets de la parité sur les coefficients d'ordre impair et pair respectivement pour les fonctions cosinus, paire, et sinus, impaire.

Exemple 13 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) : La fonction tangente est de classe au moins $\mathcal{C}^3$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

D'après la formule de Taylor-Young, il reste à calculer ses quatre premières dérivées en 0.

$$\begin{aligned}\tan(0) &= 0, & \tan''(0) &= 2 \tan'(0) \tan(0) = 0, \\ \tan'(0) &= 1 + \tan^2(0) = 1, & \text{et } \tan'''(0) &= 2 \tan'(0) + 6 \tan'(0) \tan^2(0) = 2.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

On peut déterminer explicitement un développement limité de tangente à tout ordre au voisinage de 0, mais le résultat est compliqué, pas bien utile et hors programme.

Pour le plaisir : Si jamais vous étiez tentés de penser que le développement limité en 0 de tangente n'est pas si compliqué, le voici :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + o(x^{2n-1}) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots,\end{aligned}$$

où les nombres B_n apparaissant dans le développement de $\tan(x)$ sont les nombres de Bernoulli définis par la formule explicite :

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left(\frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

II.4 Dérivation des développements limités

La dérivation de développements limités se passe moins bien que l'intégration. En effet, contrôler l'intégrale d'un petit o se fait bien, par majoration : si un terme est petit, son intégrale aussi, sur un intervalle donné.

En revanche, un terme peut être petit, mais avoir de très fortes variations locales (petites oscillations très pentues). Ainsi, la dérivation d'un petit o n'est en général pas contrôlable.

Il faut, de ce fait, des hypothèses **fortes** pour pouvoir dériver un développement limité, en revenant à la formule de Taylor-Young.

Théorème 14 (Dérivation des développements limités (Admis)) :

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{I}; \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{I}$.

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de a et si sa dérivée f' y admet également un développement limité à l'ordre $n - 1$ alors, la partie principale du développement limité de f' est la dérivée de celle du développement limité de f au voisinage de a .

Il se peut très bien, hélas, que f admette un développement limité à l'ordre n sans que f' admette un développement limité à l'ordre $n - 1$.

La fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en (XXI.3) avec $f(0) = 0$, admet un $DL_2(0)$ sans que sa dérivée admette un $DL_1(0)$.

En effet, si c'était le cas, en vertu du théorème (11), f' serait dérivable en 0, ce qu'elle n'est pas.

Pour pouvoir dériver un DL, il est nécessaire que la dérivée admette elle-même un développement limité et dans ce cas et seulement celui-là, son DL sera la dérivée de sa primitive. C'est ce que dit le théorème.

Exemple 14 (DL de $\frac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 0) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $] -\infty; 1[$ et on a :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o(x^{n+1}).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est de classe au moins $\mathcal{C}^n$ sur $] -\infty; 1[$ donc admet un développement limité en 0 d'après le théorème (13).

On peut donc appliquer le théorème (14) et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Exercice 7 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) : À partir de la relation

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x),$$

retrouver un DL_5 au voisinage de 0 de la fonction tangente.

Correction : Supposons que la fonction tangente admette un développement limité de la forme :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + o(x^5).$$

Tout d'abord, la fonction tangente étant impaire, on a :

$$\tan(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + o(x^5).$$

L'unicité du développement limité et la relation $\tan(-x) = -\tan(x)$ entraîne immédiatement : $a = c = e = 0$.

De la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, on déduit tout d'abord que la dérivée de $\tan$ admet un développement limité qui est donc la dérivée de celui de $\tan(x)$ au voisinage de 0, puis,

$$b + 3dx^2 + 5fx^4 + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (bx + dx^3 + fx^5 + o(x^5))^2$$

On développe le second membre en tronquant les termes d'ordre supérieur à 5,

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + b^2x^2 + 2bdx^4 + o(x^5)$$

Par unicité du développement limité, les coefficients sont solution du système linéaire :

$$\begin{cases} b = 1 \\ 3d = b^2 \\ 5f = 2bd \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ d = \frac{1}{3} \\ f = \frac{2}{15} \end{cases}$$

On retrouve donc $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

II.5 Développements usuels

Les formules du tableau qui suit doivent être connues **par cœur, sans délai et sans la moindre hésitation**.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres 0, 2, 4, 6, ... bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 1, 3, 5, 7, ... il suffit de tronquer au bon

endroit :

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

Notez bien que ce développement est plus fin que le développement à l'ordre 2,

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, il y a un terme d'ordre 3, avec un coefficient 0.

À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement invisible à ce niveau de précision.

$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots x^n + o(x^n).$
$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots (-1)^n x^n + o(x^n).$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$

$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n)$ où $\binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}}$ est le coefficient du binôme généralisé à $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} x^n + o(x^n).$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} x^n + o(x^n).$

$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8).$$

Tout a déjà été fait mais pour que vous reteniez bien les méthodes, un petit résumé :

1. (a) À partir de la série géométrique $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$, on obtient :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n). \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

- (b) En composant à droite par $x \mapsto -x$ dans $\left(\frac{1}{1-x}\right)$, on a :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n). \quad \left(\frac{1}{1+x}\right)$$

- (c) En intégrant terme à terme $\left(\frac{1}{1+x}\right)$:

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n). \quad (\ln(1+x))$$

- (d) En composant à droite par $x \mapsto x^2$ dans $\left(\frac{1}{1+x}\right)$, on a :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}). \quad \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

- (e) En intégrant terme à terme $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$:

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}). \quad (\arctan(x))$$

2. (a) En revenant au **théorème (13)**, on a montré à l' **exemple (12)** :

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} x^k + o(x^n). \quad ((1+x)^\alpha)$$

où $\binom{\alpha}{k}_{\mathbb{R}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ est le coefficient du binôme généralisé.

- (b) Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, à partir de $((1+x)^\alpha)$ on trouve :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2k)} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^n + o(x^n). \end{aligned} \quad (\sqrt{1+x})$$

3. (a) En revenant au **théorème (13)**, on a montré dans l' **exercice (5)** et l' **exercice (6)** :

$$\begin{aligned} e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \quad (e^x) \\ \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \quad (\cos(x)) \\ \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). \quad (\sin(x)) \end{aligned}$$

(b) En prenant la partie paire et impaire de (e^x) :

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \quad (\operatorname{ch}(x))$$

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}). \quad (\operatorname{sh}(x))$$

4. Enfin le développement limité de $\tan(x)$ au voisinage de 0 se trouve de plusieurs manières :

- (a) Comme quotient des développements limités de $\sin(x)$ par $\cos(x)$ à l'exercice (11) .
- (b) À partir de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ et par unicité des développements limités à l'exemple (13) .
- (c) En mettant en pratique la méthode exposée lors de la remarque à l'exercice (4) .
- (d) Par primitivation du développement limité de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ trouvé à l'exercice (12) .

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

II.6 Opérations sur les développements limités

On se limite dans tout ce paragraphe à des développements limités en 0 ; les fonctions usuelles étant développées en ce point.

On se ramènera, en pratique, systématiquement à ce cas par changement de variable.

- En effet, si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , noté $DL_n(a)$, sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n),$$

alors, en posant $x = a + h$, la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n).$$

- Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$, on pourra poser $h = \frac{1}{x}$, la fonction $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ admet alors un DL_n au voisinage de 0 sous la forme :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{h^k} + o\left(\frac{1}{h^n}\right).$$

On dit alors que f admet un *développement asymptotique* en $\frac{1}{h}$ d'ordre n en $\pm\infty$ et on remarquera que la partie régulière n'est pas un polynôme en x mais en $\frac{1}{x}$.

Exercice 8 (DL de $\ln(x)$ au voisinage de 2) : Donner un DL_3 de $\ln(x)$ au voisinage de 2.

Correction : On ramène le problème en 0 grâce au changement de variable $x = 2 + h$.

Chercher un développement limité de $\ln(x)$ à l'ordre 3 lorsque x tend vers 2 revient alors à chercher un développement limité de $\ln(2 + h)$ à l'ordre 3 lorsque h tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\ln(2 + h) &= \ln\left(2 \times \left(1 + \frac{h}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3) \\ \ln(x) &\underset{x \rightarrow 2}{=} \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).\end{aligned}$$

Proposition 15 (Opérations algébriques) :

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} Q(x) + o(x^n) \quad \text{où } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $\lambda P(x) + Q(x)$.
- fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a dont la partie régulière est $P(x) \times Q(x)$ tronqué à l'ordre n .

Preuve : Pour la somme et toute combinaison linéaire, c'est complètement évident, la somme de deux $o(x^n)$ étant un $o(x^n)$ d'après la **proposition (6)** et les petits o absorbant les constantes multiplicatives d'après la **proposition (5)**.

Pour le produit, si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x) + o(x^n)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} Q(x) + o(x^n)$ alors

$$f(x)g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} P(x)Q(x) + o(x^n),$$

tous les facteurs d'ordre supérieur à n étant un $o(x^n)$ et disparaissant dans celui-ci.

Exemples 15 :

- Le DL_5 de $x \mapsto e^x + \cos(x)$ en 0 est :

$$e^x + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).$$

- Pour les produits, on se contente, en pratique, de développer le produit des polynômes en omettant d'écrire les termes de degré supérieur à l'ordre recherché pour le DL.

Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est :

$$\begin{aligned}e^x \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Exercice 9 : Donner un $DL_7(0)$ de $\text{sh}^4(x)$.

Correction : Avant de se lancer dans des calculs qui peuvent être vite monstrueux, on regarde un peu le $DL(0)$ de $\text{sh}(x)$:

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \dots + o(x^{\dots}).$$

À la puissance 4, le premier terme en x du DL nous fait gagner 4 ordres. On peut donc se contenter de développer $\text{sh}(x)$ à l'ordre 4 et on tronquera au fur et à mesure des calculs tous les termes d'ordre supérieur à 7.

$$\begin{aligned} \text{sh}^4(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5) \right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + \frac{2x^6}{3} + o(x^7). \end{aligned}$$

Pas de propriété très rigoureuse à énoncer dans le cas d'une composée de deux fonctions, mais en pratique, on sait calculer le DL_n de $(g \circ f)(x)$ en $f(a)$ en remplaçant dans le DL_n de g en $f(a)$, la valeur de x par celle de $f(x)$.

ATTENTION

Comme on travaillera essentiellement avec des DL en 0, attention à ne pas composer par une fonction qui n'a pas une limite nulle quand x tend vers 0 !

On justifiera bien que l'on a bien un $o(1)$ avant d'utiliser les DL usuels en 0.

Proposition 16 (Composition) :

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \quad \text{où } P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

Si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est $(P \circ Q)(x)$.

Preuve : Pour alléger les notations prenons $n = 2$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{a + bx + cx^2}_{=P(x)} + o(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{\alpha x + \beta x^2}_{=Q(x)} + o(x^2).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } f(g(x)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} a + b(\alpha x + \beta x^2 + o(x^2)) + c(\alpha x + \beta x^2 + o(x^2))^2 \\ &\quad + o\left(\underbrace{(\alpha x + \beta x^2 + o(x^2))^2}_{=o(x^2)}\right) \end{aligned}$$

En tronquant à l'ordre 2,

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{a + b\alpha x + (b\beta + c\alpha^2)x^2}_{P(Q(x) \text{ tronqué à l'ordre 2.}} + o(x^2).$$

Remarque : Pour les sceptiques,

$$\begin{aligned}(P \circ Q)(x) &= a + b(\alpha x + \beta x^2) + c(\alpha x + \beta x^2)^2 \\ &= a + b\alpha x + (b\beta + c\alpha^2)x^2 + \underbrace{2c\alpha\beta x^3 + c\beta^2 x^4}_{= o(x^2) \text{ à } x \rightarrow 0}.\end{aligned}$$

Lors de la recherche de développements limités de fonctions composées, il faudra prendre garde à prendre en compte tous les termes du même ordre.

Par exemple, deux développements limités FAUX pour l'illustration :

On a :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + o(x^2).$$

FAUX : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+o(x)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de $\frac{1}{1-x} - 1$ n'ont pas été pris en compte.

FAUX : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+x^2+o(x^2)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2).$$

Les termes d'ordre 2 du DL de e^u avec $u = x + x^2 + o(x^2)$ n'ont pas été pris en compte.

CORRECT : $e^{\frac{1}{1-x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x+x^2+o(x^2)}$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x + x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}(x + \cancel{x^2} + \cancel{o(x^2)})^2$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}(x^2) + o(x^2)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

ATTENTION

Exemple 16 : Cherchons le DL_5 en 0 de $x \mapsto e^{\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}e^{\cos(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \times e^{\overbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}^{u \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 + u + \frac{1}{2}u^2 \right) + \underbrace{o(u^2)}_{= o(x^5)}\end{aligned}$$

Inutile d'aller plus loin car $u \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$,

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 \right) + o(x^5),$$

en tronquant tous les termes d'ordre supérieur à 5.

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)$$

Ne pas confondre composition à droite et à gauche.

En effet, si $\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ est un développement à l'ordre 4, voire 5, en composant à droite, il en est tout autrement de $(\ln(1+x))^2$ où la composition a lieu à gauche si l'on veut un développement au même ordre :

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

On remarquera que l'on a pu se contenter d'un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ pour obtenir un DL à l'ordre 5 grâce à la présence du x dans le développement qui nous a fait gagner un ordre.

ATTENTION

Méthode 2 (Développement limité d'une réciproque) :

Soit f une fonction bijective ou au moins injective au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^n$ tel que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

Alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n en 0.

On peut le déterminer en identifiant les DL

$$x = (f^{-1} \circ f)(x) + o(x^n)$$

fournissant $n+1$ équations dont les inconnues sont les coefficients du DL de f^{-1} .

L'identification est possible du fait de l'unicité du développement limité.

Exercice 10 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x e^{x^2}$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

Correction :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2} > 0.$$

En particulier, f est strictement croissante.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et f est continue. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. f' ne s'annulant pas, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc admet un développement limité à tout ordre en 0.
3. On remarque d'abord que $f^{-1}(0) = 0$.

Écrivons le DL de f^{-1} en 0 sous la forme :

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4).$$

On a de plus $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + o(x^4)$.

Posons donc $y \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + o(x^4)$. On a alors :

$$\begin{aligned} y &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + o(x^4) \\ y^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ y^3 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + o(x^4) \\ y^4 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

D'où,

$$f^{-1}(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + bx^2 + (a+c)x^3 + (2b+d)x^4 + o(x^4).$$

Or, $f^{-1}(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x = x + o(x^4)$.

Par unicité des développements limités, on en déduit que $a = 1$, $b = 0$, $a + c = 0$ et $2b + d = 0$.

On obtient finalement le DL suivant pour la fonction f^{-1} :

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - y^3 + o(y^4).$$

Remarque : On aurait pu, pour simplifier un tout petit peu les calculs, en remarquant que la fonction f^{-1} , tout comme la fonction f , est impaire, et donc que les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls.

Proposition 17 (Inversion) :

Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0 et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \neq 0$.

Alors $\frac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en composant le DL _{n} en 0 de $\frac{1}{1+u}$ avec celui de $\frac{f(x)-a}{a}$ et en multipliant par $\frac{1}{a}$.

Preuve : Comme $a \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a + (f(x) - a)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 + \frac{f(x) - a}{a}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{a} = 0$$

Donc, on peut appliquer la **proposition (16)** pour obtenir le résultat.

Méthode 3 (Quotient de développements limités) :

Dans le cas des quotients, on essaiera toujours de les écrire sous la forme $\frac{u(x)}{1+v(x)}$ avec $v \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$, ce qui permet de composer par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ dont on connaît le développement limité, puis effectuer un produit de DL.

Exemple 17 : Cherchons le DL_5 en 0 de $x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$.

On commence par écrire $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)}$.

En posant $u = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ qui est bien un $o(1)$ en 0, on applique le DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}x^4 + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) \\ \frac{e^x}{\cos(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{10}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Exercice 11 (DL de $\tan(x)$ au voisinage de 0) :

Donner un $DL_5(0)$ de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Correction : D'après l'exemple (17), on sait déjà que :

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit par le développement de $\sin(x)$ en 0 :

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6).\end{aligned}$$

Exercice 12 (DL de $\frac{1}{\cos^2(x)}$ au voisinage de 0) :

Donner un $DL_5(0)$ de $\frac{1}{\cos^2(x)}$.

Correction : D'après l' [exemple \(17\)](#) , on sait déjà que :

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

Il ne reste qu'à calculer le carré du DL précédent en tronquant tous les termes supérieurs à l'ordre 5, absorbés par le $o(x^5)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ étant paire, le $DL_4(0)$ précédent est bien un développement à l'ordre 5 :

$$\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5).$$

Derniers commentaires :

- Si $f(0) = 0$, et si f admet une partie principale d'ordre k , on peut mettre x^k en facteur.

Dans ce cas, on est ramené à une fonction $x \mapsto f(x) = x^k g(x)$ où g se prolonge en une fonction ne s'annulant pas en 0 et à laquelle on peut donc appliquer les méthodes précédentes pour obtenir un développement limité d'expression de la forme

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^k} \times \frac{1}{g(x)}.$$

Comme on divise par x^k , on obtiendra en fait un développement contenant également des puissances négatives de x . Ce n'est donc pas un DL à proprement parler mais ce qu'on appelle un *développement asymptotique*. On en reparlera un peu plus loin (cf. [paragraphe \(V.4\)](#)).

Exemple 18 : $\frac{1}{x^2 \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2).$

- Il existe des techniques plus efficaces que la composition pour faire le quotient de deux DL, notamment pour des ordres importants, en particulier une adaptation de la division euclidienne des polynômes, faite en inversant l'ordre (et le rôle) des monômes. C'est ce qu'on appelle *la division suivant les puissances croissantes*.

Cette méthode est hors-programme. Pour les petits ordres, la technique exposée ci-dessus est amplement suffisante.

III/ Équivalence

Dans l'armoire des suites, la notion de limite crée des tiroirs qui permettent de faire un premier tri :

- Dans le tiroir $+\infty$ sont rangées toutes les suites de limite $+\infty$,
- dans le tiroir ℓ toutes les suites de limite $\ell \in \mathbb{R}$,
- et dans le tiroir sans limite toutes les suites sans limite.

Or, dans certains tiroirs, il serait intéressant que de nouveaux sous-tiroirs soient créés.

Les suites $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n+n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes trois dans le tiroir $+\infty$, mais on sent bien que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ consistent en des infinis de force différente tandis que $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n+n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ s'équilibrent.

Distinguer ces infinis, c'est justement l'objet de ce paragraphe.

III.1 Introduction

Définition 3 (Équivalence) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Exemples 19 :

- $x^2 + x + 5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.
- $x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- $3^n + 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n$.

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2}.$$

Quand vous cherchez un équivalent, votre résultat ne doit jamais se présenter comme une somme de deux ou trois termes de tailles distinctes.

Par exemple, si l'on vous demande un équivalent de $x - 3x^2 + x^5$ lorsque x tend vers 0, ne répondez pas $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - 3x^2$.

ATTENTION

C'est correct puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x^2 + x^5}{x - 3x^2} = 1$ mais non abouti car vous pouvez encore comparer x et x^2 , et en l'occurrence $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

L'équivalence intéressante est donc $x - 3x^2 + x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

En résumé : il ne doit en rester qu'un : le plus gros, celui qu'on voit de loin.

De même que précédemment, je rappelle que chaque fois que l'on utilisera la notation $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$, on supposera que f et g ne s'annulent pas au voisinage de a , sauf peut-être en a toutes les deux.

De la même manière, une écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ supposera que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Commençons par une lalalissade :

Théorème 18 (La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence) :

Qu'on parle de fonctions au voisinage d'un point ou de suites, la relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence de la relation « être équivalente à » sont exactement les sous-tiroirs dont nous venons de parler.

Dire que $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, c'est dire que les fonctions $x \mapsto x^2 + x$ et $x \mapsto x^2$ portent fondamentalement la même charge infinie au voisinage de $+\infty$ i.e. méritent le même sous-tiroir.

Preuve :

Réflexivité : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$ donc $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} f$.

Transitivité : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$ i.e. $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $g \underset{x \rightarrow a}{\sim} h$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \text{ i.e. } f \underset{x \rightarrow a}{\sim} h.$$

Symétrie : Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ i.e. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1$

$$\text{i.e. } g \underset{x \rightarrow a}{\sim} f.$$

Proposition 19 (Équivalence et petit o) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) &\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)) \\ &= g(x)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n) \\ = v_n(1 + o(1)).$$

Preuve : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Moralité : Derrière un équivalent, il y a toujours un petit o caché qui contrôle l'approximation de f par g ou de u_n par v_n .

Cette propriété implique notamment qu'une somme de terme est équivalente à son terme prépondérant (celui devant lequel tous les autres sont négligeables).

La recherche de l'équivalent d'une somme passe, de fait, souvent par l'étude des négligeabilités des termes les uns par rapport aux autres.

On en déduit par exemple :

Corollaire 19.1 (Équivalent d'un polynôme) :

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$.

$$\text{Alors } P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_d x^d.$$

Preuve : En factorisant par le monôme dominant et en se rappelant que pour $k < d$, $x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^d)$.

Théorème 20 (Développement limité et équivalence) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a_p, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

En résumé, le premier terme NON NUL d'un développement limité peut tenir lieu d'équivalent.

ATTENTION

Une fonction ou une suite ne peuvent JAMAIS être équivalentes à 0.

Il suffit simplement de pousser le DL au lieu de dire une énorme bêtise.

En relisant les chapitres précédents, les équivalents usuels au voisinage de 0 sont ainsi les suivants :

À retenir 1 :

$$\blacksquare \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x, \alpha \neq 0.$$

$$\blacksquare \frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$\blacksquare \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\blacksquare \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

ATTENTION

Ne présentez jamais vos équivalents comme une somme de termes de tailles distinctes car dans une telle somme en réalité, seul le plus grand des termes compte, les autres sont négligeables.

À la place de $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, n'écrivez donc pas $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$. Cette équivalence est correcte, mais comme $x = o(1)$, écrire que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ c'est écrire $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, résultat moins précis *i.e.* la précision de l'équivalence $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ est en $o(x)$ alors que la précision de l'équivalence $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ est $o(1)$.

Proposition 21 :

$$\blacksquare \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

$$\blacksquare \arccos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$$

$$\blacksquare \operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Preuve : Dans les limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x}$, le plus simple est de reconnaître les taux d'accroissements en 0 des fonctions arcsin et th dérivables en 0.

On obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \left(\arcsin \right)'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} = \left(\operatorname{th}(x) \right)'(0) = 1 - \operatorname{th}^2(0) = 1.$$

Théorème 22 (Formule de Stirling ^[7]) :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

[7]. **James Stirling** (né en mai 1692 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg), est un mathématicien écossais.

L'équivalent asymptotique de $n!$, pour lequel Stirling est le plus connu, apparaît dans son ouvrage *Methodus Differentialis*. Un des principaux objectifs de celui-ci était d'étudier des méthodes pour accélérer la convergence des séries.

Stirling note d'ailleurs dans sa préface que **Newton** avait étudié ce problème. Beaucoup d'exemples de ses méthodes sont donnés, dont le problème de **Leibniz** de

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Il applique également ses procédés d'accélération à la somme de la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ dont la valeur exacte était encore inconnue à l'époque.

Preuve : Vous démontrerez sûrement un jour ou l'autre et de mille façons cette formule.

La démonstration est hors-programme mais pas la formule.

Proposition 23 (Limite et équivalence) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ alors, soit f et g ont toutes les deux la même limite en a , soit aucune de ces deux fonctions ne possède de limite en a .
2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite, soit aucune de ces deux suites ne possède de limite en $+\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec ℓ réel et **non nul** alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

D'après (1), deux fonctions ou suites qui sont dans le même tiroir-équivalence sont aussi dans le même tiroir-limite, de sorte que les « tiroirs-équivalence » sont bien des sous-tiroirs des « tiroirs-limites ».

D'après (2), pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$, toute suite de limite ℓ est équivalente à la suite constante $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$, donc le « tiroir ℓ » n'a pas de sous-tiroir.

Nous n'avons, par conséquent, créé des sous-tiroirs que pour quatre « tiroirs-limite » : le « tiroir $-\infty$ », « le tiroir 0 », « le tiroir $+\infty$ » et le « tiroir sans-limite ».

Il obtient la relation $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 \binom{2n}{n}}$ qui lui permet d'obtenir la valeur approchée 1,64493406684822643, mais ne reconnaît pas $\frac{\pi^2}{6}$, ce qui sera fait par **Euler** peu d'années après.

Il donne également un théorème à propos de la convergence d'un produit infini. Dans ses travaux sur l'accélération de la convergence des séries se trouve une discussion des méthodes de de **Moivre**.

L'ouvrage contient d'autres résultats sur la fonction Gamma d'**Euler** et la fonction *hypergéométrique*, ainsi que la définition des nombres de Stirling.

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{mais} \quad f \not\sim g \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{mais} \quad u_n \not\sim v_n \end{array}$$

Ne pas comprendre ceci, c'est ne rien comprendre au chapitre.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ mais $e^x \not\sim x$.

— $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ mais $x^2 \not\sim x$.

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ mais $2^n \not\sim n$.

De plus, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ mais, en général, $u_{n+1} \not\sim u_n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ mais $2^{n+1} = 2 \times 2^n \not\sim 2^n$.

ATTENTION

En utilisant ce que l'on sait sur les limites, on a mieux que la proposition (1) :

Théorème 24 (Conservation du signe) :

Fonctions : Si $f(x) \sim g(x)$ alors $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe dans un voisinage de a .

Suites : Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n sont du même signe à partir d'un certain rang.

Preuve : Il suffit de se rappeler qu'une suite ou une fonction qui converge vers un nombre non nul, en l'occurrence 1 ici, est du même signe que lui à partir d'un certain rang ou dans un voisinage respectivement.

ATTENTION

Cela ne signifie pas qu'à partir du rang n , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de signe constant !
Le signe peut varier, mais de la même manière pour les deux suites.

On peut faire un peu mieux, et obtenir une conservation stricte : « il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, u_n et v_n sont soit tous les deux nuls, soit strictement de même signe.

III.2 Application : Série harmonique et constante d'Euler

Théorème 25 (Développement asymptotique de la série harmonique) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1), \quad \text{où } \gamma \simeq 0,5772156649 \dots$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Preuve : Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

Montrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} - \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

$$\begin{aligned} - \quad v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

$$- \quad \text{Enfin } v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc convergentes vers la même limite, noté γ .

On s'arrête là pour l'instant dans ce développement mais on le poussera un peu plus loin en fin d'année voire l'année prochaine, voire dans un devoir ou deux.

III.3 Opérations sur les équivalents

Théorème 26 (Petit o et équivalence II) :

Fonctions : $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ et $g \underset{x \rightarrow a}{\sim} h$ alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$.

Suites : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$.

Preuve : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Exemple 20 : Comme $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ alors :

$$\sin(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Théorème 27 (Les équivalents sont compatibles avec le produit, l'inverse et les puissances) :

Fonctions :

1. Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $h \underset{x \rightarrow a}{\sim} k$ alors, soit $fh \underset{x \rightarrow a}{\sim} gk$.
2. Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g}$.
3. Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g^\alpha$.

Suites :

1. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t_n$ alors, soit $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n t_n$.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Preuve : Par exemple, si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + o(g)$ alors :

$$\frac{1}{f} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{g + o(g)} \underset{x \rightarrow a}{=} \frac{1}{g} \times \frac{1}{1 + o(1)} \underset{x \rightarrow a}{=} \frac{1}{g} \times (1 + o(1)) \underset{x \rightarrow a}{=} \frac{1}{g} + o\left(\frac{1}{g}\right) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g}.$$

Théorème 28 (Les équivalents sont compatibles avec la composition à droite et les suites extraites) :

Fonctions : Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et φ une fonction définie au voisinage de b à valeurs dans I .

Si $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ et $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$ alors $f \circ \varphi \underset{x \rightarrow b}{\sim} g \circ \varphi$.

Suites : Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_{\varphi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.

Avec les équivalents, deux opérations sont **formellement interdites** :

Somme : $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $3 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - x$ mais : ~~$4 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$~~ .

Si les parties principales se compensent, on s'expose à des erreurs.

Solution : Pousser les développements limités.

Composition à gauche : $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n + \ln(n)$, mais, si on compose par $x \mapsto e^x$ à gauche ~~$e^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^n$~~ .

En général, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(v_n)$. Même avec des fonctions « gentilles » comme le logarithme ou l'exponentielle, cela peut être faux.

ATTENTION

Méthode 4 (Pour contourner le problème des sommes) :

- Étudier les négligeabilités entre les termes de la somme pour ne garder que les termes d'ordre prépondérant.

— Écrire les équivalents avec un o et effectuer la somme sous cette forme.

1. Si les parties principales ne se compensent pas, on peut revenir à un équivalent.
2. Sinon, on ne peut pas conclure directement. Il faut étudier l'ordre de grandeur de ce qu'il reste après simplification des parties principales, et pour cela, il faut avoir une meilleure approximation de chaque terme (la connaissance de l'équivalent ne suffit pas). On peut par exemple utiliser un développement limité.

Exemple 21 : $\sqrt{x^2 + \ln(x)} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}} - 1 \right).$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}u.$

D'où $\sqrt{x^2 + \ln(x)} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \times \frac{\ln(x)}{2x^2} = \frac{\ln(x)}{2x}.$

Exercice 13 : Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x^2) - \sin^2(x).$

Correction : On sent bien que pas mal de termes vont se simplifier car $\ln(1+u) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\sin(u) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u.$ Espérons simplement qu'ils ne se simplifient pas jusqu'à l'ordre 50 !

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) - \sin^2(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc $\ln(1+x^2) - \sin^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^4.$

Exercice 14 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$

Correction : Comme $\forall k \in \mathbb{N}, e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right),$ on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \underbrace{\left(1 + o(e^{-n})\right)}_{=o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}.$

Méthode 5 (Trouver un équivalent simple de $\ln(u_n)$) :

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, utiliser l'équivalent classique.
2. Sinon, écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n(1 + o(1))$, où v_n est un équivalent simple de u_n , puis $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1 + o(1))$.

Comparer ensuite les deux termes. Autrement dit, il s'agit de mettre le terme prépondérant en facteur dans le logarithme pour le sortir du logarithme.

Évidemment, cela s'adapte aux fonctions.

Exercice 15 : Trouver un équivalent de $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Correction : On applique la méthode :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n}(1 + o(1)).$$

$$\text{D'où } \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$

Méthode 6 (Trouver un équivalent simple de e^{u_n}) :

Développer u_n à $o(1)$ près : $u_n = v_n + o(1)$.

S'adapte aux fonctions.

Exercice 16 : Trouver un équivalent en 0 de $e^{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)}$.

Correction : On applique la méthode :

$$\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{6}{x} - \frac{1}{2} + o(1).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } e^{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{6}{x} - \frac{1}{2} + o(1)} \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{6}{x} - \frac{1}{2}} \times e^{o(1)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{e^{\frac{6}{x}}}{\sqrt{e}} (1 + o(1)). \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{\frac{6}{x}}}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

IV/ Domination

Définition 4 (Domination) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et on lit :

« f est un grand O de g au voisinage de a ».

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on lit :

« $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un grand O de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de l'infini ».

En particulier, pour les fonctions, un $O(1)$ est une fonction bornée au voisinage de a et, pour les suites, un $O(1)$ est une suite bornée.

Exemples 22 :

$$- \sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(1).$$

$$- \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1).$$

$$- \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$- \lfloor e^n \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(e^n).$$

Proposition 29 (Domination, définition équivalente) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un réel positif M tel que, dans un voisinage de a , $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un réel positif M tel que, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq M|v_n|$.

Autrement dit, une suite ou une fonction est dominée si son ordre de grandeur ne dépasse pas celle de sa dominante à une constante multiplicative près.

Proposition 30 (Grand O, petit o et équivalence) :

Fonctions : Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \bar{I}$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

Si $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$.

Suites : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Preuve : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ou 1 alors la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

ATTENTION

La domination n'implique ni la négligeabilité ni l'équivalence. C'est le contraire qui est vrai.

Par exemple, $2x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^2)$ mais $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$ et $2x^2 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

Exemples 23 :

— Comme $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ alors $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 2, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 3.

— De même, $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ entraîne $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$.

Ce résultat est plus fin qu'un développement limité à l'ordre 3, mais plus grossier qu'un développement limité à l'ordre 4.

Les propriétés et leur démonstration sont quasi-identiques à celles exposées dans les paragraphes précédents. On les résume ici :

À retenir 2 :

Les théorèmes sur les petits o sont tous vrais avec des grands O à la place des petits o :

- les grands O absorbent les constantes multiplicatives,
- la somme de deux grands O est un grand O ,
- un grand O d'un grand O est un grand O ,
- avec le produit, tout va bien,
- avec la composition **à droite** et les suites extraites, tout va bien.

Derniers commentaires :

- De même que pour la relation de négligeabilité, à part qu'elle n'est pas anti-symétrique, la relation de domination se comporte à peu près comme une relation d'ordre **large**.
- On se sert souvent des o et O pour estimer (ou borner) la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite, en étudiant $u_n - \ell$.

On compare ainsi souvent la différence $u_n - \ell$ à une suite de référence de limite nulle, ou u_n à une suite de référence de limite $+\infty$.

Par exemple, une suite telle que $|u_n - \ell| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-n})$ aura une convergence rapide (exponentielle), alors que l'information $|u_n - \ell| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ ne permettra pas de contrôler aussi bien la convergence bien qu'une telle égalité n'empêchera pas que la convergence puisse être rapide.

V/ Exemples et Applications

Pas de propositions ni de théorèmes dans cette dernière partie de chapitre, le but est simplement de faire une petite liste des calculs les plus classiques pour lesquels un recours à des développements limités pourra vous permettre d'aller beaucoup plus loin (ou plus vite) que ce que vous ne faisiez avant.

Les techniques utilisées doivent tout de même être parfaitement connues.

V.1 Recherche d'un équivalent

Rappel 1 : Une fonction est équivalente au premier terme **NON NUL** de son développement limité.

Exercice 17 : Donner un équivalent en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-2x}.$$

Correction : Par une petite division euclidienne, $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{2} - \frac{9}{2(3-2x)}.$

Cette fonction est visiblement choisie pour être embêtante alors on va être plus malin et trouver un développement limité en 0 d'une de ses primitives F , facile à trouver et définie par :

$$F(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin^2(x) + \frac{9}{4}\ln(3-2x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin^2(x) + \frac{9}{4}\ln\left(1 - \frac{2}{3}x\right) + \frac{9}{4}\ln(3) + C \in \mathbb{R}$$

On choisit la primitive qui s'annule en 0 :

$$= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\arcsin^2(x) + \frac{9}{4}\ln\left(1 - \frac{2}{3}x\right).$$

La fonction f n'ayant aucun soucis en 0, elle y admet un développement limité qui sera donc la dérivée de celui de F d'après le **théorème (14)**.

$$\begin{aligned}
 F(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 - \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{81}x^3 + o(x^3) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \cancel{\frac{3}{2}x} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{\frac{3}{2}x} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{2}{9}x^3 + o(x^3) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{9}x^3 + o(x^3) \\
 f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{3}x^2 + o(x^2).
 \end{aligned}$$

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^2$.

V.2 Calculs de limites

Exercice 18 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Correction : Nous sommes face à une forme indéterminée de la forme 1^∞ .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{1+o(1)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

V.3 Position locale d'une fonction par rapport à une tangente

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente^[8] ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré.

Tous ces calculs sont très souvent faisables sans recours aux développements limités, mais les DL présentent le grand avantage de pouvoir tout faire en un seul calcul.

Ainsi, pour l'étude d'une fonction au voisinage de 0, un DL à l'ordre 2 donnera l'équation de la tangente et la position relative via le signe du terme d'ordre 2 (éventuellement d'ordre 3 si celui d'ordre 2 s'annule).

Plus précisément :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

Si f admet, au voisinage de a , un développement limité de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + (x-a)a_1 + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p),$$

[8]. si on est au voisinage d'une valeur finie

où p est donc le plus petit indice supérieur ou égal à 2 tel que $a_p \neq 0$, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

On a alors $f(x) - (f(a) - f'(a)(x-a)) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ i.e.

La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-a)$ comme tangente au point a .

On a mieux : la position du graphe de f au voisinage de a par rapport à sa tangente en a dépend du **signe** de la fonction $x \mapsto a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

1. Si p est pair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ est du signe **constant** de a_p .

Le graphe de f est donc situé soit au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a soit au-dessous suivant le signe de a_p .

De plus, si $a_1 = 0$ alors $f(x) - f(a)$ garde un signe constant au voisinage de a i.e. f possède un extremum local en a : maximum local si $a_p < 0$, minimum local si $a_p > 0$.

2. Si p est impair, $x \mapsto a_p(x-a)^p$ change de signe en a , donc le graphe de f traverse sa tangente en a : on dit que f possède en a un *point d'inflexion*.

Exemple 24 : Comme $\frac{x \sin(x)}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$, la fonction $x \mapsto \frac{x \sin(x)}{1+x^2}$ vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, sa courbe représentative admet l'axe des abscisses comme tangente en 0 et f reste positive au voisinage de 0 donc possède un minimum local en 0.

Exercice 19 : Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1-2x)}{1+x}$.

1. Donner un $DL_3(0)$ de f .
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 et que f y possède un point d'inflexion.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \right) (1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2. L'équation de la tangente en 0 à la courbe de f est donc $y = -2x$.

Comme $g(x) - (-2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{8}{3}x^3$, le graphe de g est au dessus de sa tangente 0 à gauche et au-dessous à droite.

Le point d'abscisse 0 est donc un point d'inflexion.

V.4 Développement asymptotique

On peut également définir des « développements limités » en la variable x au voisinage de $+\infty$. On se ramène alors à 0 par un changement de variables $h = \frac{1}{x}$ et on parle plutôt dans ce cas de *développement asymptotique*.

Exemple 25 : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$

Un développement limité permet de comparer localement au voisinage d'un point a une fonction à une fonction polynomiale, donc à situer la fonction sur une échelle de comparaison constituée de fonctions $x \mapsto (x - a)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas de fonctions **non bornées** au voisinage d'un point a , on peut être amené à introduire des puissances négatives de $(x - a)$, afin de mesurer la divergence locale.

On parlera là encore de développement asymptotique d'ordre n pour une approximation du type :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=-n_0}^n a_k (x - a)^k \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} \frac{a_{-n_0}}{(x - a)^{n_0}} + \frac{a_{-n_0+1}}{(x - a)^{n_0-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{x - a} + a_0 + \dots + a_n (x - a)^n + o((x - a)^n). \end{aligned}$$

Exemple 26 : $\frac{1}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7}{300}x^3 + o(x^4).$

ATTENTION

Si f a un développement asymptotique commençant par un terme de degré $-k$, pour obtenir un DL à l'ordre n du produit fg , il faudra donc augmenter l'ordre du DL de g jusqu'à $n + k$.

Exercice 20 : Montrer que $\frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x).$

Correction : On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{\cos(x) - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \left(\frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{x^2}{12} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x). \end{aligned}$$

Exercice 21 : Calculer le DA en $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$.

Correction : $\frac{x}{x^2 - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$.

V.5 Asymptotes et limite en $+\infty$

Exercice 22 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

Rappel 2 (Asymptote d'une fonction en $\pm\infty$) : Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $\pm\infty$.

On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$ si $f(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} ax + b + o(1)$.

En particulier, $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$.

Exemple 27 : Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3 + [x]^2}{x^2 + 2}$.

Comme $[x] \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x + O(1)$ alors, par primitivation, $[x]^2 \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^2 + O(x)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } f(x) &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \frac{x^3 + x^2 + O(x)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} \left(x + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + x + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 1 + x + o(1). \end{aligned}$$

La courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $y = x + 1$ comme asymptote en $\pm\infty$.

Exercice 23 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{1+x} e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position par rapport à la courbe.

Correction : Pour se ramener en 0, on effectue le changement de variable $x = \frac{1}{h}$ et on étudie la fonction $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h(1+h)} e^{\cos(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} (1 - h + h^2 + o(h^2)) e^{1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h} (1 - h + h^2 + o(h^2)) \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h} - e + \frac{e}{2}h + o(h) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex - e + \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En particulier, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e(x-1) + o(1)$ donc f admet pour asymptote la droite d'équation $y = e(x-1)$.

Enfin, comme $f(x) - e(x-1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2x} \geq 0$, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Arctangente
 - Développement limité, 26
- Asymptote, 52
- Binôme
 - de Newton, 22
- Changement de variable
 - dans un développement limité, 28
- Coefficient
 - binomial, 22
- Compatibilité
 - de l'inverse
 - avec équivalents, 42
 - de la composition
 - avec les petits o, 9
 - avec équivalents, 43
 - du produit
 - avec les petits o, 8
 - avec équivalents, 42
- Continuité
 - et développement limité, 14
- Cosinus
 - Développement limité, 26
 - hyperbolique
 - Développement limité, 26
- Croissance
 - comparée, 4, 5
- Divergence, 51
- Division
 - euclidienne, 36
 - suivant les puissances croissantes, 36
- Domination, 46
- Dérivabilité
 - et développement limité, 14
- Dérivation
 - des développements limités, 24
- Développement
 - asymptotique, 28, 35, 51
 - de Taylor-Young, 18
 - limité, 11
 - et équivalence, 38
 - Composition, 30
 - Continuité et Dérivabilité, 14
 - d'ordre 1, 14
 - de $\ln(1-x)$, 26
 - de $\arctan(x)$, 26
 - de $\cos(x)$, 22
 - de $\cos(x)$, 26
 - de $\operatorname{ch}(x)$, 26
 - de $\operatorname{ch}(x)$, 21
 - de e^x , 26
 - de e^x , 21
 - de $\ln(x)$ au voisinage de 2, 28
 - de $\ln(1+x)$, 16, 26
 - de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, 26
 - de $\sqrt{1+x}$, 26
 - de $\sin(x)$, 22
 - de $\sin(x)$, 26
 - de $\operatorname{sh}(x)$, 26
 - de $\operatorname{sh}(x)$, 21
 - de $\tan(x)$, 17, 23, 25, 26, 34
 - de $(1+x)^\alpha$, 21, 26
 - de $\frac{1}{\cos^2(x)}$, 35
 - de $\frac{1}{1-x}$, 12
 - de $\frac{1}{1-x}$, 16, 24, 26, 27
 - de $\frac{1}{(1-x)^2}$, 24
 - de $\frac{1}{1+x}$, 26
- Dérivation, 24
- Inversion, 33
- Opération, 29
- Parité, 13
- Primitivation, 15
- Unicité du développement, 12
- Équivalence, 36
 - d'un polynôme, 38
 - et limite, 40
- Équivalent
 - Inverse, 42
 - Produit, 42
 - Puissance, 42
- Euler, 40
 - Constante d', 41
- Existence
 - de développement limité, 20
- Exponentielle
 - Développement limité, 26
- Extremum
 - local, 50
- Formule
 - de Stirling, 39
 - de Taylor-Lagrange, 20
 - de Taylor-Young, 18
 - du binôme, 22
- Imparité, 13

- Inverse
 - d'équivalent, 42
- Leibniz, 39
- Limite, 6
 - Calcul de, 49
 - et équivalent, 40
- Logarithme
 - Développement limité, 26
- Méthode
 - Équivalent de e^{u_n} , 45
 - Équivalent de $\ln(u_n)$, 45
 - Développement limité d'une réciproque, 32
 - Quotient de développements limités, 34
 - Somme d'équivalents, 43
- Moivre, 40
- Négligeabilité, 2
- Opération
 - sur les développements limités, 28
 - sur les petits o , 7
- Parité, 13
- Partie
 - régulière, 11
- Point
 - d'inflexion, 50
- Polynôme
 - de Taylor, 18
- Primitivation
 - des développements limités, 15
- Produit
 - d'équivalent, 42
 - de petit o , 8
- Relation
 - d'ordre, 8, 48
 - d'équivalence, 5
 - de comparaison
 - Équivalence, 36
 - Domination, 46
 - Négligeabilité, 2
- Sinus
 - Développement limité, 26
 - hyperbolique
 - Développement limité, 26
- Somme
 - de petit o , 7
- Stirling, 39
- Série
 - de Taylor, 19
 - géométrique, 22
 - harmonique, 41
- Tangente, 11
 - Développement limité, 26
- Taylor
 - Young, 18
- Théorème
 - de Taylor, 19
 - des accroissements finis, 15
 - des nombres premiers, 4
- Transitivité
 - de l'équivalence, 37
 - de la négligeabilité, 8
- Unicité
 - du développement limité, 12
- Voisinage
 - de a , 7
 - de $+\infty$, 2
 - de $+\infty$, 52
 - privé d'un point, 2

