Analyse asymptotique

1. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par quotient, on obtient :
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1. \text{ Doù, } \boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1.}$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme résultat d'opérations et compositions sur de telles fonctions. De plus, d'après la question précédente, on a :
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$
Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

3. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$. Ainsi, on a :
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}.$$
Posons $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$. On a alors :
$$\begin{aligned}
\boxed{f(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + \mathrm{o}\left(u(x)^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) + o\left(x^3\right) \\
f(x) &\boxed{\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right).}
\end{aligned}$$

4. Par la question précédente, on en déduit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 (donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$). Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0.}}$

   Cependant, $\boxed{\text{rien ne garantit a priori que } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ ni même a fortiori } \mathcal{C}^3 \text{ en 0.}}$

5. D'après Q3., on a
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 1 - \frac{x}{2}$.
De plus,
$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{12} \geqslant 0.$$
Ainsi, $\boxed{\text{au voisinage de 0, la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente en 0.}}$

6. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^\star}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\,\mathrm{e}^x - 1)^2}.}$$

7. On a :

$$(1-x)(e^x - 1) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad (e^x-1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{(1-x)(e^x-1)}{(e^x-1)^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

On a donc :$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Rédaction 1 : On a donc :

— f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après Q2.,

— f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$,

— $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existe et vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$

Rédaction 2 : Par Q3., on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$. Ainsi, la fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = -1/2$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2} = f'(0)$. Donc la fonction f' est continue en 0.

Finalement, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$

8. Après les mêmes calculs qu'à Q7. en considérant les développements limités d'ordre supérieurs, on obtient :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right).}$$

9. La fonction f est une primitive de f' sur $\mathbb{R}^\star$ et d'après Q8., on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$

Alors, par le théorème de primitivation du développement limité,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

D'après Q2, $f(0) = 1$, d'où :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^3\right).}$$

10. Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, on pose $h = x - \ln(3) \underset{x\to\ln(3)}{\to} 0$. On a :

$$
\begin{aligned}
\boxed{f(x)} &\underset{x\to\ln(3)}{=} f(h+\ln(3)) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{\mathrm{e}^{h+\ln(3)}-1} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{\mathrm{e}^{h}\,\mathrm{e}^{\ln(3)}-1} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{3\,\mathrm{e}^{h}-1} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{3(1+h+o(h))-1} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{2(1+\frac{3h}{2}+o(h))} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h+\ln(3)}{2}\left(1-\frac{3h}{2}+o(h)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\ln(3)}{2}+\frac{2-3\ln(3)}{4}h-\frac{3(\ln(3)-1)}{4}h^2+o\left(h^2\right) \\
&\boxed{\underset{x\to\ln(3)}{=} \frac{\ln(3)}{2}+\frac{2-3\ln(3)}{4}(x-\ln(3))-\frac{3(\ln(3)-1)}{4}(x-\ln(3))^2+o\left((x-\ln(3))^2\right).}
\end{aligned}
$$

Analyse asymptotique