Chapitre

# XXIII Espaces vectoriels

La notion d'*espace vectoriel* est une structure fondamentale des mathématiques modernes comme on a commencé à l'entrevoir dans les chapitres précédents.

Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices, …

| $\vec{\mathcal{P}}$ | $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ | $\mathbb{R}[X]$ | $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ | $f-2g$ | $3P+2Q$ | $3A+2B$ | $3(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+2(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ |
| $\vec{0}$ | $x\longmapsto 0_{\mathbb{R}}$ | $0_{\mathbb{R}[X]}$ | $(0)_{n,p}$ | $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ |

**Figure XXIII.1** – Exemples d'espaces vectoriels

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,…

Au paragraphe (III) , on s'intéressera à une notion complètement fondamentale, celle d'*application linéaire*, qui va éclairer d'un jour nouveau tous les termes vus depuis le début de l'année et faisant intervenir ce fameux mot « linéaire ».

Globalement, les applications linéaires sont des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de mathématiques très divers.

| E | T | $\mathrm{T}(\lambda x+y)=\lambda\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}(y)$ |
|---|---|---|
| $\mathscr{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ | $f\longmapsto f'$ | $(\lambda f+g)'=\lambda f'+g'$ |
| $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ | $\mathrm{P}\longmapsto \mathrm{P}'$ | $(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'=\lambda\mathrm{P}'+\mathrm{Q}'$ |
| $\mathscr{C}^0(x_0)$ | $f\longmapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+g(x))=\lambda\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ |
| $\mathbb{R}^2$ | $(x\,;y)\longmapsto ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$ | $a(\lambda x+x')+b(\lambda y+y')=\lambda(ax+by)+(ax'+by')$ |
| $\mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ | $f\longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ | $\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ |
| $\left\{\text{Suites convergentes}\right\}$ | $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n+v_n)=\lambda\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ |
| $\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$ | $\vec{x}\longmapsto\vec{a}\cdot\vec{x}$ | $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{x})+(\vec{a}\cdot\vec{y})$ |
| $\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$ | $\vec{x}\longmapsto[\vec{a}\,;\vec{x}]$ | $[\vec{a}\,;\lambda\vec{x}+\vec{y}]=\lambda\,[\vec{a}\,;\vec{x}]+[\vec{a}\,;\vec{y}]$ |
| $\mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ | $f\longmapsto f'+af,\ a\in\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ | $(\lambda f+g)'+a(\lambda f+g)=\lambda\,(f'+af)+(g'+ag)$ |
| $\mathscr{C}^2(\mathrm{I},\mathbb{R})$ | $f\longmapsto f''+af'+bf,\ a,b\in\mathbb{R}$ | $(\lambda f+g)''+a(\lambda f+g)+b(\lambda f+g)=\lambda\,(f''+af'+bf)+(g''+ag'+bg)$ |

**Figure XXIII.2** – Applications linéaires et espaces vectoriels

CHAPITRE XXIII. ESPACES VECTORIELS

**CONTENU**



Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I/ Structure d'espace vectoriel

## I.1 Généralités

**Définition 1 :** Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

— Une loi de *composition interne* notée $+_{\mathrm{E}}$ (l'addition) :

$$+_{\mathrm{E}}:\ \begin{array}{ccc}\mathrm{E}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ (x\,;y) & \longmapsto & x+_{\mathrm{E}}y\end{array}$$

— Une loi de *composition externe*, notée $\cdot_{\mathrm{E}}$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\cdot_{\mathrm{E}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda._{\mathrm{E}}x \end{array}$$

On dit que $(\mathrm{E},+_{\mathrm{E}},\cdot_{\mathrm{E}})$ est un *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* abrégé en $\mathbb{K}$-ev lorsque :

1. $(\mathrm{E},+_{\mathrm{E}})$ est un groupe abélien, *i.e.*
   (a) $+_{\mathrm{E}}$ est *associative* : $\forall\ (x\,;y\,;z)\in\mathrm{E}^3$, $(x+_{\mathrm{E}}y)+_{\mathrm{E}}z=x+_{\mathrm{E}}(y+_{\mathrm{E}}z)=x+_{\mathrm{E}}y+_{\mathrm{E}}z$.
   (b) $+_{\mathrm{E}}$ est *commutative* : $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2$, $x+_{\mathrm{E}}y=y+_{\mathrm{E}}x$.
   (c) $+_{\mathrm{E}}$ admet un *élément neutre* noté $0_{\mathrm{E}}$ et appelé *vecteur nul* :
   $$\forall\,x\in\mathrm{E},\quad x+_{\mathrm{E}}0_{\mathrm{E}}=0_{\mathrm{E}}+_{\mathrm{E}}x=x.$$
   (d) Tout élément de E admet un *symétrique* pour $+_{\mathrm{E}}$ appelé *opposé de* $x$ et noté $-x$ :
   $$\forall\,x\in\mathrm{E},\quad x+_{\mathrm{E}}(-x)=0_{\mathrm{E}}.$$
2. La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :
   (a) $\forall\,x\in\mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad \lambda._{\mathrm{E}}(\mu._{\mathrm{E}}x)=(\lambda\times_{\mathbb{K}}\mu)._{\mathrm{E}}x$ : *compatibilité avec* $\times_{\mathbb{K}}$ *dans* $\mathbb{K}$.
   (b) $\forall\,x\in\mathrm{E},\ \forall\ (\lambda\,;\mu)\in\mathbb{K}^2,\quad (\lambda+_{\mathbb{K}}\mu)._{\mathrm{E}}x=\lambda._{\mathrm{E}}x+_{\mathrm{E}}\mu._{\mathrm{E}}x$ : *compatibilité* $+_{\mathbb{K}}$ *dans* $\mathbb{K}$.
   (c) $\forall\ (x\,;y)\in\mathrm{E}^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda._{\mathrm{E}}(x+_{\mathrm{E}}y)=\lambda._{\mathrm{E}}x+_{\mathrm{E}}\lambda._{\mathrm{E}}y$ : *compatibilité avec* $+_{\mathrm{E}}$ *dans* E.
   (d) $\forall\,x\in\mathrm{E},\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot_{\mathrm{E}}x=x$ : $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_{\mathrm{E}}$.

On appelle :
— *vecteurs* les éléments de E.
— *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le *corps de base* de l'espace vectoriel E.

Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique et on peut, en fait, les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles.

**Remarques :**
— S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_{\mathrm{E}}$ et $\cdot_{\mathrm{E}}$.
— On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
— Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x+y$ signifie $(\lambda.x)+y$.
— L'élément neutre de $(\mathrm{E}\,;+)$ est unique.

En effet, supposant que l'on en ait deux $e$ et $e'$ alors :

$$e\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } e'}}{=}e+e'\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } e}}{=}e'.$$

C'est un fait général.

— De même, l'opposé d'un vecteur $x\in\mathrm{E}$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux $x'$ et $x"$ alors on aurait :

$$x'\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=}x'+0_{\mathrm{E}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } x"}}{=}x'+(x+x")\underset{\substack{\uparrow\\ \text{associativité de } +}}{=}(x'+x)+x"\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } x'}}{=}0_{\mathrm{E}}+x"\underset{\substack{\uparrow\\ \text{def de } 0_{\mathrm{E}}}}{=}x".$$

C'est également un fait général.

— Si elle est non ambigüe, on allège en général l'écriture en notant $\lambda u$ plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda$ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.

ATTENTION

— Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul $0_{\mathrm{E}}$ : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.

— La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.

**Proposition 1 (Règles de calcul) :**

1. $\forall (x; x'; y) \in \mathrm{E}^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'$.
2. $\forall\ (\lambda\,; x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E},\ (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

   En particulier, $\quad (-1_{\mathbb{K}}).x = -x$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ (x\,; y) \in \mathrm{E}^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$.
4. $\forall\ (\lambda\,; \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in \mathrm{E}, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$.
5. $\forall x \in \mathrm{E}, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathrm{E}} \qquad$ et $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$.

Réciproquement, $\forall\ (\lambda\,; x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$,

$$\lambda.x = 0_{\mathrm{E}} \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_{\mathrm{E}}.$$

En particulier,

6. Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall\ (x\,; y) \in \mathrm{E}^2, \quad \lambda.x = \lambda.y \implies x = y$.
7. Si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, alors $\forall\ (\lambda\,; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda.x = \mu.x \implies \lambda = \mu$.

**Preuve :**

1. Simple existence et définition du symétrique de $y$ dans $\mathrm{E}$.
2. Soit $(\lambda\,; x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$.

   On a :
   $$(-\lambda).x + \lambda.x = (-\lambda + \lambda).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathrm{E}} \implies (-\lambda).x = -(\lambda.x),$$
   et
   $$\lambda.(-x) + \lambda.x = \lambda.(-x + x) = \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}. \implies \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$$

   Enfin, pour $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$, on a : $(-1_{\mathbb{K}}).x = -(1_{\mathbb{K}}.x) = -x$.
3. Conséquence de $(2)$.
4. Conséquence de $(2)$.
5. Soit $x \in \mathrm{E}$. Alors $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} +_{\mathbb{K}} 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathbb{K}}.x \implies 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathrm{E}}$.

   Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a aussi $\lambda.0_{\mathrm{E}} = \lambda.(0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}}) = \lambda.0_{\mathrm{E}} + \lambda.0_{\mathrm{E}} \implies \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$.

   Réciproquement, soit $(\lambda\,; x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$ tel que $\lambda.x = 0_{\mathrm{E}}$.

   Supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ et montrons que $x = 0_{\mathrm{E}}$.

   On a alors $x = 1_{\mathbb{K}}.x = (\lambda^{-1}\lambda).x = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$.

**Remarque :** Pour vous remémorer le premier chapitre de logique, afin de démontrer la relation $\mathcal{P} \implies (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$ *i.e.* $\rceil\mathcal{P} \cup (\mathcal{Q} \cup \mathcal{R})$, on a démontré ici $(\mathcal{P} \cap \rceil\mathcal{Q}) \implies \mathcal{R}$ *i.e.* $\rceil(\mathrm{P} \cap \rceil\mathcal{Q}) \cup \mathcal{R}$.

6. Conséquence de $(3)$ et $(5)$.
7. Conséquence de $(4)$ et $(5)$.

**Exercice 1 :** Soit E un $\mathbb{R}$ev. On munit l'ensemble $\mathrm{F} = \mathrm{E} \times \mathrm{E}$ de l'addition usuelle et on définit une loi de composition externe $\cdot$ par $(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$.

Montrer que $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ev.

## I.2 Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathbb{K}$ **:** L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}}} = 0_{\mathbb{K}}$ et muni des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x + y = x +_{\mathbb{K}} y \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda \cdot x = \lambda \times_{\mathbb{K}} x. \end{array}$$

**Proposition 2 :**
$(\mathbb{K}\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda\,;z) & \longmapsto & \lambda.z = \lambda z \quad (\text{produit dans } \mathbb{C}) \end{array}$$

La différence entre ces deux structures sur un même ensemble sera notable au niveau de la dimension que nous définirons plus loin.

**Remarque :** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{K}^n$ **:** L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^2$ des vecteurs du plan (de même que l'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^3$ des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (encore heureux !).

On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan. On y reviendra dans le chapitre sur les applications linéaires.

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{K}^n$ les lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n) ; (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda ; (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{array}.$$

**Proposition 3 :**
L'ensemble $(\mathbb{K}^n ; + ; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}^n}} = (0, 0 \dots, 0)$.

$\mathrm{E}^n$ **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $n$ espaces vectoriels $\left(\mathrm{E}_1 ; +_{\mathrm{E}_1} ; \cdot_{\mathrm{E}_1}\right)$, ..., $\left(\mathrm{E}_n ; +_{\mathrm{E}_n} ; \cdot_{\mathrm{E}_n}\right)$ tous sur $\mathbb{K}$ et le produit cartésien

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \dots \times \mathrm{E}_n = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,/\, \forall\, i \in [\![1 ; n]\!],\ x_i \in \mathrm{E}_i\right\}.$$

On définit sur E les lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n) ; (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto & (x_1 +_{\mathrm{E}_1} y_1, x_2 +_{\mathrm{E}_2} y_2, \dots, x_n +_{\mathrm{E}_n} y_n) \end{array}$$

et

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda ; (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto & (\lambda._{\mathrm{E}_1} x_1, \lambda._{\mathrm{E}_2} x_2, \dots, \lambda._{\mathrm{E}_n} x_n) \end{array}.$$

**Proposition 4 :**
L'ensemble $(\mathrm{E} ; + ; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathrm{E}}} = (\overrightarrow{0_{\mathrm{E}_1}}, \overrightarrow{0_{\mathrm{E}_2}} \dots, \overrightarrow{0_{\mathrm{E}_n}})$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathrm{E}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\mathrm{E} = \mathbb{K}$, on retrouve ainsi que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Exemple 1 :** Si on note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{E}$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{E}$ alors, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \cdot_{\mathrm{E}} x +_{\mathrm{E}} y = \begin{pmatrix} \lambda._{\mathrm{E}_1} x_1 +_{\mathrm{E}_1} y_1 \\ \vdots \\ \lambda._{\mathrm{E}_n} x_n +_{\mathrm{E}_1} y_n \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **:** On munit $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} ; (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}\right) & \longmapsto & (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & \left(\lambda\,;(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}\right) & \longmapsto & \lambda\cdot(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}. \end{array}$$

Ainsi doté,

**Proposition 5 :**
L'ensemble $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

**ATTENTION** Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

**$\mathscr{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$ :** Soient $\Omega$ un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{F}(\Omega\,;\mathrm{E})$, noté aussi $\mathrm{E}^\Omega$ des fonctions de $\Omega$ à valeurs dans E peut être munis des lois :

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathrm{E}^\Omega \times \mathrm{E}^\Omega & \longrightarrow & \mathrm{E}^\Omega \\ & (f\,;g) & \longmapsto & \mathrm{f{+}g} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & & f(x) +_{\mathrm{E}} g(x) \end{array} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathrm{E}^\Omega & \longrightarrow & \mathrm{E}^\Omega \\ & (\lambda\,;f) & \longmapsto & \lambda.\mathrm{f} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & & \lambda \cdot_{\mathrm{E}} f(x) \end{array} \end{array}$$

**Proposition 6 :**
Si $\Omega$ est non vide alors l'ensemble $(\mathscr{F}(\Omega\,;\mathrm{E})\,;+\,;\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathscr{F}(\Omega;\mathrm{E})}}$ est la fonction nulle $0_{\mathscr{F}(\Omega;\mathrm{E})} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathrm{E}} \end{array}$.

Si $\Omega = \mathbb{R} = \mathbb{K}$, on en déduit, par exemple, que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les fonctions cos, exp, ... sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

**ATTENTION** $\mathscr{F}(\Omega\,;\mathrm{Y})$ n'est, en général, pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{K}$-ev.

Comme conséquence avec $\Omega = \mathbb{N}$, on retrouve aussi la propriété suivante prouvée dans un chapitre précédent :

**Corollaire 6.1 :**
L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{K}}$.

La somme de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et le produit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un réel $\lambda$ étant la suite $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\mathbb{K}[X]$ **:** L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & \left(\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k ; \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k\right) & \longmapsto & \sum_{k\geqslant 0} (a_k+b_k) X^k \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & \left(\lambda ; \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k\right) & \longmapsto & \lambda\cdot\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k = \sum_{k\geqslant 0} (\lambda a_k) X^k. \end{array}$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ est un espace vectoriel.

**ATTENTION** | L'ensemble des polynômes de degré exactement $n$ n'est pas un espace vectoriel.

**Exercice 2 :** Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{0\}$.
2. $\emptyset$.
3. $\{0,1\}$.
4. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+a=0 \text{ et } x+3az=0\}$.
5. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+xy+y^2\geqslant 0\}$.
6. $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est croissante}\}$.

### I.3 Combinaisons linéaires

**Définition 2 :** Soit $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

— Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $x_1$, $x_2$, ..., $x_p\in E$.

On dit que $x\in E$ est *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1$, $x_2$, ..., $x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tel que :

$$x=\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\dots+\lambda_p.x_p=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\cdot x_k.$$

— Soit X une partie de E.

On dit que $x \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si $x$ est combinaison linéaire d'une famille ***finie*** de vecteurs de X.

**ATTENTION**

Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèses supplémentaires sur $(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k \cancel{\Longrightarrow} \forall\, k \in [\![1\,;p]\!]\,, \quad \lambda_k = \mu_k.$$

**Exemples 2 :**

— Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

— Dans $\mathbb{R}^3$, $(1\,;2\,;0)$ est combinaison linéaire de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;0)$, mais pas de $(1\,;1\,;0)$ et $(0\,;1\,;1)$.

— L'ensemble des combinaisons linéaires de $0_\mathrm{E}$ est $\{0_\mathrm{E}\}$.

— L'ensemble des combinaisons linéaires de $u$ est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par $u$.

— Dans $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \cos 3x$.

— Si $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions $e_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

  Plus précisément, $f \in \mathrm{E}$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si $f$ est une fonction polynomiale.

— Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

— Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $\mathrm{E}_{i,j}$ pour $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

## II/ Sous-espace vectoriel

**Définition 3 :** Soit $(\mathrm{E}\,;+_\mathrm{E}\,;\cdot_\mathrm{E})$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E, abrégé souvent en *sev* lorsque :

— $\mathrm{F} \neq \emptyset$

— $\forall\, (x\,;y) \in \mathrm{F}^2, \quad x +_\mathrm{E} y \in \mathrm{F}$ *(stabilité de F pour $+_\mathrm{E}$)*

— $\forall\, x \in \mathrm{F}, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda ._\mathrm{E} x \in \mathrm{F}$ *(stabilité de F pour $\cdot_\mathrm{E}$)*

**Exemple 3 :** Si E est un $\mathbb{K}$-ev alors $\{0_\mathrm{E}\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.

**Remarque :** Tout sous-espace F de E contient le vecteur $0_E$ : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément $x$ et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas $0_E$ ne pourra être un sev de E.

**ATTENTION** | Aucun $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$-ev ou sev n'est vide !!!!

**Corollaire 6.2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :**

$$\text{F est un sev de E} \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall\ (x\,;y) \in F^2,\ \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$



**Preuve :**

($\Rightarrow$) Assez simple à montrer.

($\Leftarrow$) Comme $0_E \in F$, on a $F \neq \emptyset$.

En prenant $\lambda = \mu = 1$, on obtient la stabilité par $+$.

En prenant $\mu = 0$, on obtient la stabilité par $\cdot$.

**Remarque :** Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda.x + y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.

Le corollaire (6.2) nous entraîne à considérer les lois :

$$+_F : \begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x\,;y) & \longmapsto & x +_E y \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot_F : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda\,;x) & \longmapsto & \lambda._E x \end{array}.$$

Ces lois s'appellent les *lois induites* sur F (par celles de de E) ou les restrictions des lois de E à F. C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

**Théorème 7 :**
Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $(E\,; +_E\,; \cdot_E)$.

Alors, $(F\,; +_F\,; \cdot_F)$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$-ev.

Considérant une sous-partie F (non vide nécessairement) d'un $\mathbb{K}$-ev E, une des grandes conséquences de ce théorème est qu'il ne nous sera plus nécessaire de montrer les 9 critères de la définition (1) mais seulement de démontrer que F est un sev de E.

**Preuve :**

— L'ensemble $\mathrm{F}$ est muni d'une addition et d'une loi externe.
— L'addition reste évidemment associative et commutative car ceci est vraie dans $\mathrm{E}$ contenant $\mathrm{F}$.
— Comme $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$, l'addition de $\mathrm{F}$ possède un élément neutre :

$$\forall x \in \mathrm{F},\, x +_{\mathrm{F}} 0_{\mathrm{E}} = x +_{\mathrm{E}} 0_{\mathrm{E}} = x.$$

— Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors $-x = (-1)._{\mathrm{E}} x = (-1)._{\mathrm{F}} x \in \mathrm{F}$ : tout élément de $\mathrm{F}$ admet un opposé qui est bien dans $\mathrm{F}$.
— Les dernières propriétés, qui sont vraies lorsque $x$ et $y$ appartiennent à $\mathrm{E}$, sont a fortiori vraies lorsque $x$ et $y$ appartiennent à $\mathrm{F}$.

**Exemples 4 (En géométrie) :**

— On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}_3$.

L'ensemble $(\mathscr{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathscr{E}}_3$.

— On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathscr{E}}_3$.

L'ensemble $\mathrm{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \,/\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathscr{E}}_3$.

— Dans le plan, une droite $(\mathscr{D})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Dans l'espace, une droite $(\mathscr{D})$ ou un plan $(\mathscr{P})$ passant par $\mathrm{O}\,(0\,;0\,;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.

— L'ensemble $\mathrm{F} = \{(0, y, y, t) \,/\, (y\,;t) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
— Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathrm{F} = \{(x\,;y\,;z) \,/\, x+y+z=0\}$ est un sev mais l'ensemble $\mathrm{G} = \{(x\,;y\,;z) \,/\, x+y+z=1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).

**Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :**

— L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
— Soient $\mathrm{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Les ensembles $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^k(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \sqsubset \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathrm{I}$ dans $\mathbb{R}$.

Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ est un sev du $\mathbb{K}$ev vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[\mathrm{X}] \sqsubset \mathbb{K}_1[\mathrm{X}] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \sqsubset \mathbb{K}_{n+1}[\mathrm{X}] \sqsubset \ldots \sqsubset \mathbb{K}[\mathrm{X}].$$

**Remarque :** La relation « être un sev » est transitive.

**Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :**

Les ensembles
— $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,

— $\mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
— $\mathscr{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
— $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exemples 7 (Dans l'espace des suites) :** Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$ev des suites réelles.

— L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
— L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.

**Exemples 8 (Et bien d'autres) :**

— L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de $n$ équations à $p$ inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
— L'ensemble des solutions sur un intervalle I, d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

  Plus précisément,
  — $\left\{y \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y' + a(x)y = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
  — $\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \;/\; y'' + ay' + by = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.
— L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{K}$ev des suites réelles ou complexes.

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (I.2) .

**Exercice 3 :** Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

— $\mathrm{F}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\}$
— $\mathrm{F}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
— $\mathrm{F}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$
— $\mathrm{F}_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$

### II.1 Sous-espace engendré par une partie finie

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ ?

On donne la réponse dans ce paragraphe.

Soit X une partie d'un espace vectoriel $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

**Définition 4 :** Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v. et X une partie de E.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X, noté $\operatorname{vect}(\mathrm{X})$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X.

On convient que $\operatorname{vect}(\emptyset) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

**Exemple 9 :** Dans le plan, si $\mathrm{X} = \{\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors ce s.e.v est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$ :

$$(\mathscr{D}) = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Toute la question est de savoir déterminer, s'il existe, ce plus petit sev. Cherchons la réponse du côté de l'intersection des sev contenant cette partie. Une intersection de sev est-elle déjà un sev ? La réponse est oui !

**Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :**
Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'intersection $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est un sous-espace vectoriel de E.

**Preuve :**

— $\forall\, i \in \mathrm{I}$, $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}_i$ donc $0_{\mathrm{E}} \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$.

— Soient $(x\,;y) \in \left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\lambda.x + y \in \mathrm{F}_i$ donc $\lambda.x + y \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$.

Ainsi $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ est bien un sev de E.

**Exemples 10 :**

— $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

— $\left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,/\, \forall\, k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\right\}$ est un sev de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

**ATTENTION**

La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel !!!

Par exemple, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$ sont dans $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ mais pas $(1\,;1) = (1\,;0) + (0\,;1)$.

**Exercice 4 :** Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ deux sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel.

Montrer que :

$$\mathrm{F} \cup \mathrm{G} \text{ est un sous-espace vectoriel de E} \iff (\mathrm{F} \subset \mathrm{G}) \text{ ou } (\mathrm{G} \subset \mathrm{F}).$$

**Correction :** Si $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$ alors le résultat est évident.

Réciproquement, montrons la contraposée et supposons $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ *i.e.* qu'il existe $f \in F \setminus G$ et $g \in G \setminus F$.

$f$ et $g$ sont alors deux éléments de $F \cup G$ mais $f + g$ ne peut y appartenir aussi sans contredire leur définition.

Par exemple, si $f + g \in F$ alors $\exists f' \in F$ tel que $g = f' - f \in F$ car $F$ est un espace vectoriel. Ce qui est impossible.

En conclusion $F \cup G$ ne peut être un espace vectoriel.

**Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :** Soit $X$ une partie de $E$.

On note $\text{vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant $X$.

C'est l'intersection de tous les sev contenant $X$ :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

**Preuve :** Soit $X$ une partie de $E$ et considérons $\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F$, l'intersection de tous les sev contenant $X$ (dont fait partie $E$).

Alors,

— $\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F$ est bien un sous-espace vectoriel de $E$ d'après la proposition (8).

— C'est bien le plus petit au sens de l'inclusion car pour tout sev $G$ de $E$ tel que $X \subset G$, on a :

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F = G \cap \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F \subset G.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

**Proposition 9 :**
Soit $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

1. $F$ est un sev de $E$ si, et seulement si $F = \text{vect}(F)$.
2. Pour toutes parties $X$ et $Y$ de $E$, $X \subset Y \implies \text{vect}(X) \subset \text{vect}(Y)$.

**Exercice 5 :** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\text{vect}(f_1, f_2) = \text{vect}(\text{ch}, \text{sh})$.

**Correction :** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(t) = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ et $\text{sh}(t) = \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2$. On en déduit que $\text{vect}(f_1, f_2)$ contient ch et sh donc le plus petit espace vectoriel les contenant *i.e.* $\text{vect}(\text{ch}, \text{sh}) \subset \text{vect}(f_1, f_2)$.

Réciproquement, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1 = \text{ch}(t) + \text{sh}(t)$ et $f_2 = f_1 = \text{ch}(t) - \text{sh}(t)$. Par le même raisonnement $f_1, f_2 \in \text{vect}(\text{ch}, \text{sh})$ puis $\text{vect}(f_1, f_2) \subset \text{vect}(\text{ch}, \text{sh})$.

Par double inclusion, on déduit l'égalité.

Faisons enfin le lien avec l'intérêt majeur de la structure : les combinaisons linéaires.

**Théorème 10 :**
Soient $(E\,;+)\cdot$ un $\mathbb{K}$-ev X une partie non vide de E.

$$\text{vect}(X) \text{ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de } X.$$

Quoi de plus naturel que de former toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de X pour obtenir le plus petit sous-ensemble stable par combinaisons linéaires d'éléments de X ?

**Preuve :** Nommons provisoirement $\mathcal{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X et montrons que $\text{vect}(X) = \mathcal{C}$ par double inclusion.

$\supset$ **:** $\text{vect}(X)$ est un sev contenant X. Par stabilité, il contient donc toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de X *i.e.* $\mathcal{C} \subset \text{vect}(X)$.

$\subset$ **:** Montrons que $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X.

Remarquons tout d'abord que tout vecteur $x$ de X est clairement une combinaison linéaire de lui-même donc élément de $\mathcal{C}$.

En clair, $X \subset \mathcal{C}$ et en particulier $\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Soient maintenant $(x\,;y) \in \mathscr{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $x$ et $y$ sont des combinaisons linéaires de vecteurs de X mais aussi $\lambda.x + y$ donc $\lambda.x + y \in \mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est un sev de E contenant X. Comme $\text{vect}(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) de ceux-là, on obtient $\text{vect}(X) \subset \mathcal{C}$.

**Exemple 11 (IMPORTANT) :** Si $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est finie, on note $\text{vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ ou plus simplement $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On a alors légalité :

$$\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \Big\{\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \dots + \lambda_n.e_n \;/\; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\Big\}.$$

En particulier et à retenir,

$$\boxed{x \in \mathrm{vect}\,(e_1,\, e_2,\, \dots,\, e_n) \iff \exists\,(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i.}$$

**Exemples 12 :**

— Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$,

— $\mathrm{vect}_{\,\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}$,

— $\mathrm{vect}_{\,\mathbb{R}}(\,\mathrm{i}\,) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

— Dans le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$, $\mathrm{vect}_{\,\mathbb{C}}(1) = \mathrm{vect}_{\,\mathbb{C}}(\,\mathrm{i}\,) = \mathbb{C}$.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\mathrm{vect}\,(\vec{u}\,;\vec{v})$ est un plan vectoriel.

— Dans $\mathrm{E} = \mathcal{F}\,(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{X} = \{e_n : x \longmapsto x^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.

— Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles satisfaisant

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

est un sev.

Mieux, en notant $r_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on sait que :

$$\mathcal{S} = \mathrm{vect}\,\left((r_+^n)_{n\in\mathbb{N}}\,;(r_-^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

## II.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E, $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

**Définition 6 :** Soit $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.

Si F et G sont deux sev de E, on appelle *somme* de F et G, notée $\mathrm{F} + \mathrm{G}$, l'ensemble

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \{x + y \,/\, (x\,;y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}\}.$$

En particulier, écrire $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\, \exists\, (x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}.}$$

ATTENTION Il n'y a pas toujours unicité dans cette écriture. Si oui, on parlera alors de *somme directe*.

**Proposition 11 :**
Pour tous sous-espaces $\mathrm{F}$ et $\mathrm{G}$ de $\mathrm{E}$, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est un sev de $\mathrm{E}$.

**Preuve :**
- $0 \in \mathrm{F}$ et $0 \in \mathrm{G}$ donc $0 = 0 + 0 \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$.
- Soient $(u\,;v) \in (\mathrm{F}+\mathrm{G})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

  Alors il existe $x_1 \in \mathrm{F}$ et $y_1 \in \mathrm{G}$ tels que $u = x_1 + y_1$ et $x_2 \in \mathrm{F}$ et $y_2 \in \mathrm{G}$ tels que $v = x_2 + y_2$.

  $$\lambda.u + v = \lambda.(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(\lambda.x_1 + x_2)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{(\lambda.y_1 + y_2)}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F}+\mathrm{G}.$$

Donc, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est bien un sev de $\mathrm{E}$.

**Exemple 13 :** Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathscr{E}}^3$. On pose $(\mathscr{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathscr{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathscr{D}) + (\mathscr{D}') = (\mathscr{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathscr{D}) + (\mathscr{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.

**Remarque :** $\mathrm{F}+\mathrm{F} = \mathrm{F}$ !

Quid du rapport entre $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ ? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

**Théorème 12 :**
Soient $\mathrm{F}$ et $\mathrm{G}$ deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathrm{E}$.

$$\mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G}) = \mathrm{F}+\mathrm{G}.$$

**Remarque :** $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est donc le plus petit sev de $\mathrm{E}$ au sens de l'inclusion contenant $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$.

**Preuve :** Montrons que $\mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G}) = \mathrm{F}+\mathrm{G}$ par double inclusion :

$\subset$ : Facilement $\forall\, x \in \mathrm{F}$, $x + 0 \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$ *i.e.* $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}+\mathrm{G}$. De même, $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}+\mathrm{G}$.

$\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est donc un sev contenant $\mathrm{F}$ et $\mathrm{G}$ donc $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$. Il contient donc le plus petit d'entre eux $\mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$.

$\supset$ : Soit $z = x + y \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$ où $x \in \mathrm{F} \subset \mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$ et $y \in \mathrm{G} \subset \mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$.

Par stabilité de $\mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$, $z = x + y \in \mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$.

En conclusion, $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{F} \cup \mathrm{G})$.

En particulier,

$$\mathrm{vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \mathrm{vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m)\,.$$

## II.3 Somme directe

**Définition 7 :** Soient $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont en *somme directe*, notée $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$, lorsque tout élément de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ se décompose *de manière unique* en la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall\, z\in\mathrm{F}\oplus\mathrm{G},\ \exists!\,(x\,;y)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad z=x+y.$$

**Proposition 13 :**
Soient $\mathrm{F},\mathrm{G}$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev $(\mathrm{E}\,;+\,;\cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe.
2. $\forall\,(x\,;x')\in\mathrm{F}^2,\ \forall\,(y\,;y')\in\mathrm{G}^2,\ x+y=x'+y' \implies x=x' \quad \text{et} \quad y=y'.$
3. $\forall\,x\in\mathrm{F},\ \forall\,y\in\mathrm{G},\ x+y=0_{\mathrm{E}} \implies x=y=0_{\mathrm{E}}.$
4. $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}$

ATTENTION | $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}$ et non $\emptyset$ !!!!!!

**Preuve :** Il est déjà clair que :

$$1 \implies 2 \implies 3.$$

$3 \implies 4$ **:** Pour tout $x\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$, $x$ et $-x$ appartiennent tous deux à F et G.

On peut alors écrire

$$\underbrace{x}_{\in\mathrm{F}}+\underbrace{-x}_{\in\mathrm{G}}=0_{\mathrm{E}} \underset{3}{\implies} x=0_{\mathrm{E}}.$$

On a donc prouvé que $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}\subset\{0_{\mathrm{E}}\}$ et l'égalité avec l'inclusion réciproque nécessairement vraie.

$4 \implies 1$ **:** Considérons $u\in\mathrm{F}+\mathrm{G}$ admettant deux décompositions $u=x_1+x_2=y_1+y_2$ avec $x_1,y_1\in\mathrm{F}$ et $x_2,y_2\in\mathrm{G}$.

Alors,

$$\underbrace{x_1-y_1}_{\in\mathrm{F}}=\underbrace{y_2-x_2}_{\in\mathrm{G}}\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}.$$

On en déduit que $x_1=y_1$ et $x_2=y_2$ d'où l'unicité.

**Exercice 6 :** Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

1. $\mathrm{F}=\mathbb{K}\vec{u}$ et $\mathrm{G}=\mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

   Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u}+\mathbb{K}\vec{v}=\mathbb{K}\vec{u}\oplus\mathbb{K}\vec{v}=\mathrm{vect}\,(u\,;v)$.
2. $\mathrm{F}=\mathrm{vect}\,(1,\mathrm{X})$ et $\mathrm{G}=\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}^2)$.

**Correction :**

1. Soit $\vec{w} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} = \mu\vec{v}$. En particulier, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

   Comme les deux vecteurs sont non colinéaires, nécessairement $\lambda = 0$ d'où $\vec{w} = \vec{0}$ *i.e.* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \left\{\vec{0}\right\}$. Comme $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un espace vectoriel, l'inclusion réciproque est claire d'où l'égalité et la somme directe.
2. Soit $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} = c\mathrm{X}^2 \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Le polynôme $c\mathrm{X}^2 - b\mathrm{X} - a$ admet alors une infinité de racines ; il est nul et $a = b = c = 0$ qui entraîne $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \left\{0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]}\right\}$ puis l'égalité et la somme directe.

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

**Définition 8 :** On dit que la somme de $n$ sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$, ..., $\mathrm{F}_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$, ..., $\mathrm{F}_n$.

$$\forall\, x \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n,\ \exists!\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_n,\ x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

La somme directe de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ est notée : $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_n$

**Théorème 14 :**
Il y a équivalence entre :

1. La somme de $n$ sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est directe.
2. $\forall\, p \in \mathbb{N}, 2 \leqslant p \leqslant n,\ \left(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_{p-1}\right) \cap \mathrm{F}_p = \{0\}$.

**Preuve :**

$1 \implies 2$ **:** Supposons que la somme $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ est directe et montrons que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, 2 \leqslant p \leqslant n, \left(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots,\ \mathrm{F}_{p-1}\right) \cap \mathrm{F}_p = \{0\}\,.$$

Soit $p$ un entier compris entre 2 et $n$, et $z$ un élément de $\left(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_{p-1}\right) \cap \mathrm{F}_p$ :

$$\exists\left(z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}\right) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_{p-1}, z = z_1 + z_2 + \ldots + z_{p-1}.$$

Donc $0 = z_1 + z_2 + \ldots + z_{p-1} - z$ avec $\left(z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}\right) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times \mathrm{F}_{p-1}$ et $z \in \mathrm{F}_p$.

Comme $0$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$, on en déduit $z_1 = z_2 = \ldots = z_{p-1} = z = 0$.

$2 \implies 1$ **:** Réciproquement, on va montrer la contraposée :

Supposons donc que la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$ n'est pas directe.

Il existe alors un élément $z$ appartenant à $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$ admettant deux décompositions distinctes en somme d'éléments de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$ *i.e.*

$$\exists\,(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times, z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

et

$$\exists\,(z_1', z_2', \ldots, z_n') \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \times \ldots \times, z = z_1' + z_2' + \ldots + z_n'$$

CHAPITRE XXIII. ESPACES VECTORIELS

tels que $(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq (z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$.

Soit $q$ le plus grand entier compris entre 1 et $n$ tel que $z_q \neq z'_q$ alors

$$z_1, z_2, \dots, z_n = z'_1, z'_2, \dots, z'_n \text{ implique } (z_1 - z'_1) + (z_2 - z'_2) + \dots + (z_{q-1} - z'_{q-1}) = z'_q - z_q.$$

Donc $z'_q - z_q \in (F_1 + F_2 + \dots + F_{q-1}) \cap F_q$ *i.e.* $(F_1 + F_2 + \dots + F_{q-1}) \cap F_q \neq 0$.

**Remarque :** Si $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p \leqslant n, \forall q \in \mathbb{N}, 1 \leqslant q \leqslant n, p \neq q : F_p \cap F_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

**Contre-Exemple 14 :** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient $F = \operatorname{vect}((1,0))$, $G = \operatorname{vect}((0,1))$ et $H = \operatorname{vect}((1,1))$.

Il est immédiat que $F \cap G = \{0\}, G \cap H = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$, et pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

En effet l'élément $(1,1)$ de $F + G + H$ se décompose en somme d'éléments de $F, G$ et $H$ de la manière suivante :

$$(1,1) = (0,0) + (0,0) + (1,1)$$

mais aussi de la manière suivante :

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0).$$

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture.

En conclusion,

ATTENTION

Dans le cas de plusieurs sous-espaces vectoriels, le fait que les sous-espaces aient deux à deux une intersection réduite au vecteur nul n'est pas une condition suffisante pour que la somme soit directe.

## II.4 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 9 :** Soient $(E\,;+\,;\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

On dit que F et G sont *supplémentaires* (dans E) si $E = F \oplus G$.

En particulier, $\boxed{E = F \oplus G \iff \forall z \in E,\ \exists!\,(x\,;y) \in F \times G, \quad z = x + y.}$

**ATTENTION**

Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Pour être précis, les vecteurs de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $\mathrm{E}\backslash(\mathrm{F}+\mathrm{G})$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E, c'est affirmer en plus que $\mathrm{E}=\mathrm{F}+\mathrm{G}$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? La réponse est oui, mais nous le démontrerons un peu plus loin seulement en dimension finie (quand nous saurons ce que ça veut dire).

**Exemples 15 :**

— Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{\imath} \oplus \mathbb{R}\vec{\jmath} = \vec{\mathcal{E}}^2$.

  ◇ $\mathbb{R}\vec{\imath}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

  — $\mathbb{R}\vec{\imath}$ et $\mathbb{R}\vec{\jmath}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.

— $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$.

— $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

— $\mathcal{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

**Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :**

$$\mathrm{E}=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} \iff \begin{cases}\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}\\ \mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_{\mathrm{E}}\}\end{cases}.$$

**Exemple 16 :** Soient $\mathrm{E}=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1\,;0)$ et $e_2\,(-1\,;1)$.

Montrons que $\mathrm{E}=\operatorname{vect}(e_1)\oplus\operatorname{vect}(e_2)$.

Soit $(x\,;y)\in\mathrm{E}$. Cherchons $(a\,;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x\,;y)=a.e_1+b.e_2$.

Or,

$$(x\,;y)=a.e_1+b.e_2 \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x=a-b\\y=b\end{cases} \iff \begin{cases}a=x+y\\b=y\end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, donc la somme est directe *i.e.* $\mathbb{R}^2=\operatorname{vect}(e_1)\oplus\operatorname{vect}(e_2)$.

**Exercice 7 :** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

— $\mathrm{F}=\left\{(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3\,/\,x+y+z=0\right\}$.

— $\mathrm{G}=\operatorname{vect}((1\,;1\,;1))$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

2. On pose également $\mathrm{H} = \operatorname{vect}((1\,;0\,;0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

**Correction :**

1. Raisonnons par analyse-synthèse :

   Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et supposons qu'il existe $f \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} \in \mathrm{F}$ et $g = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{G}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = f + g \iff \begin{cases} x = x_f + \lambda \\ y = y_f + \lambda \\ z = z_f + \lambda \\ x_f + y_f + z_f = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3}(x+y+z) \\ x_f = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}(y+z) \\ y_f = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}(x+z) \\ z_f = \dfrac{2}{3}z - \dfrac{1}{3}(x+y)\,. \end{cases}$$

   Les composantes $f$ dans $\mathrm{F}$ et $g = u - f$ dans $\mathrm{G}$ de $u$ sont donc correctement déterminés et on vérifie, réciproquement, qu'elles conviennent : $\mathrm{F}$ et $\mathrm{G}$ engendrent donc $\mathbb{R}^3$.

   Cette écriture étant unique, la somme est donc directe *i.e.* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

2. Le raisonnement est identique :

$$u = f + h \iff \begin{cases} x = x_f + \lambda \\ y = y_f \\ z = z_f \\ x_f + y_f + z_f = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x + y + z \\ x_f = -y - z \\ y_f = y \\ z_f = z. \end{cases}$$

   Les composantes $f$ dans $\mathrm{F}$ et $h = u - f$ dans $\mathrm{H}$ de $u$ sont encore correctement déterminés et uniques. On en déduit la somme directe $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

**ATTENTION**

Comme on le voit dans l'exercice précédent, un sous-espace vectoriel a, en général, plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'un supplémentaire et non du supplémentaire.

**Méthode 1 (Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ par analyse-synthèse) :**
Il s'agit, pour un vecteur quelconque $x$ de E, de trouver $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$ uniques tels que $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.

**Déclaration d'un vecteur à décomposer :** On fixe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sans conditions particulières.

**Analyse :** On suppose que $x$ s'écrit sous la forme $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$, où $x_{\mathrm{F}}$ est un vecteur de F et $x_{\mathrm{G}}$ un vecteur de G.

On essaye ensuite de construire $x_{\mathrm{F}}$ et $x_{\mathrm{G}}$ uniquement à l'aide de $x$ ou d'autres vecteurs de référence.

On doit trouver un unique couple candidat $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}})$. L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)

**Synthèse :** On considère le couple $(x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{G}})$ exhibé dans l'analyse et on montre qu'il satisfait les qualités requises *i.e.* $x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}} = x$, $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$.

## III/ Applications linéaires

*Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?*

### III.1 Généralités

**Définition 10 :** Soient $(\mathrm{E}\,;+_{\mathrm{E}}\,;\cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}\,;+_{\mathrm{F}}\,;\cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est un *homomorphisme d'espaces vectoriels* ou, plus simplement, une *application linéaire* si :

- $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x +_{\mathrm{E}} y) = f(x) +_{\mathrm{F}} f(y)$.
- $\forall\ (\lambda\,;x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}, \quad f(\lambda ._{\mathrm{E}} x) = \lambda ._{\mathrm{F}} f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

**Vocabulaire :**

- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que $f$ est une *forme* linéaire.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathbb{K})$ ou, simplement, $\mathrm{E}^*$ [1].
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ est linéaire et bijective, on dit que $f$ est un *isomorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{I}som_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ ou, simplement, $\mathscr{I}som(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$ est linéaire, on dit que $f$ est un *endomorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- Si $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$ est linéaire et bijective, on dit que $f$ est un *automorphisme*.

  Leur ensemble est noté $\mathscr{G}l_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ ou, simplement, $\mathscr{G}l(\mathrm{E})$.

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

[1]. On l'appelle le *dual* de E.

**ATTENTION**

L'application $\ln : (\mathbb{R}_+^* ; \times) \longmapsto (\mathbb{R} ; +)$ est également appelé un *morphisme* mais non un homomorphisme car $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ n'est pas un espace vectoriel.

De même, les homéomorphismes et autres difféomorphismes rencontrés en analyse n'ont, en général, rien à voir avec des morphismes. Juste un choix de nom malheureux.

**Exemples 17 :**

— $\forall k \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}$.

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

— Les translations $t_a : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x+a \end{array}$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_{\mathrm{E}}$.

— Les applications $x \longmapsto x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $\cos(x)$, $\sqrt{x}$, $\mathrm{e}^x$, ... ne sont pas linéaires !!!!!

— $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+2y, -x, 3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

— $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x-3, 4+y, -x+2y) \end{array}$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On pourra notamment constater que $f(2x ; 2y) \neq 2f(x ; y)$.

**Proposition 16 :**

Soient $(\mathrm{E} ; +_{\mathrm{E}} ; \cdot_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F} ; +_{\mathrm{F}} ; \cdot_{\mathrm{F}})$ deux $\mathbb{K}$-ev et $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$.

1. $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{F}) \implies f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
2. $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{F}) \iff \forall (x ; y) \in \mathrm{E}^2, \forall (\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2,$
$$f(\lambda._{\mathrm{E}} x + \mu._{\mathrm{E}} y) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x) + \mu._{\mathrm{F}} f(y)$$
$$\iff \forall (x ; y) \in \mathrm{E}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x + y) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x) + f(y).$$
3. La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :
$$\forall \mathrm{A} \text{ sev de } \mathrm{E} \text{ et } f \in \mathscr{L}(\mathrm{E} ; \mathrm{F}), \quad f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}(\mathrm{A} ; \mathrm{F}).$$

**Preuve :**

1. On a $f(0_{\mathrm{E}}) = f(0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}}) = f(0_{\mathrm{E}}) + f(0_{\mathrm{E}})$. Donc $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
2. Montrons ces deux équivalences par implications tournantes.
   — Supposons que $f$ soit linéaire.

   Alors $\forall (x ; y) \in \mathrm{E}^2, \forall (\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda.x + \mu.y) = f(\lambda.x) + f(\mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$.

   — En particulier, $\forall (x ; y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda._{\mathrm{E}} x + y) = \lambda._{\mathrm{F}} f(x) + f(y)$.

   — Supposons que $f$ vérifie la propriété ci-dessus.

   Alors,
   - $\forall (x ; \in) \mathrm{E}, \quad f(0_{\mathrm{E}}) = f(-x + x) = -f(x) + f(x) = 0_{\mathrm{F}}$.
   - $\forall (x ; y) \in \mathrm{E}^2, \quad f(x + y) = f(1.x + y) = 1.f(x) + f(y) = f(x) + f(y)$.
   - $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.x) = f(\lambda.x + 0_{\mathrm{E}}) = \lambda.f(x) + f(0_{\mathrm{E}}) = \lambda.f(x) + 0_{\mathrm{F}} = \lambda.f(x)$.

   Par transitivité de l'implication, on a donc bien montré les deux équivalences.

3. Clair.

Pour toute application linéaire $f$ :

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.f(e_i)} \quad \text{et} \quad \boxed{f(0_E)=0_F.}$$

On pourrait penser que les conditions définissant une application linéaire sont restrictives, et qu'il va donc y avoir « peu » d'applications linéaires. C'est vrai si on se restreint à des espaces donnés très simples. Par exemple, les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f : x \longmapsto ax$, celles que vous avez justement appelées linéaires il y a quelques années ! Mais la grande variété des ensembles étant munis d'une structure d'espace vectoriel fait qu'il y a en fait énormément d'applications linéaires, très variées, que nous avons déjà, pour beaucoup d'entre elles, croisées depuis le début de l'année.

**ATTENTION**

Si $f$ est linéaire alors $f(0)=0$, mais la réciproque est fausse.

En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0)=0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.

**Méthode 2 (Montrer qu'une application n'est pas linéaire) :**
Il suffit par exemple, au choix,

1. de vérifier que $f(0_E)\neq 0_F$,
2. d'exhiber un couple particulier de vecteurs $(x,y)$ et un couple particulier de scalaires $(\lambda,\mu)$ pour lesquels $f(\lambda x+\mu y)\neq \lambda f(x)+\mu f(y)$.
3. de montrer que $f(-x)\neq -f(x)$ pour un vecteur $x\in E$ particulier.

**Exemples 18 :** Les applications ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x\,;y) & \longmapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

**Exemples 19 (Exemples de référence) :**

**L'homothétie :** Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. $h_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}$ est un endomorphisme de E, appelé *homothétie de* E *de rapport* $\lambda$. En particulier, $\mathrm{Id}_E$ est linéaire.

**La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ :** $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme.

**La dérivation sur $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{R})$ :** $\delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^1(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est linéaire.

Ce n'est pas un endomorphisme.

**La dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K})$ :** $\delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ est un endomorphisme.

**L'intégrale sur** $[a\,;b]$ **:** $\begin{array}{rccl} \mathscr{I}: & \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est une forme linéaire.

**L'évaluation en** $a$ **:** si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in \mathrm{A}$,

$$\begin{array}{rccl} e_a: & \mathcal{F}(\mathrm{A},\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(a) \end{array} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$\begin{array}{rccl} e_a: & \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a). \end{array}$$

**La transposition matricielle :** $\begin{array}{rccl} \tau: & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^\top \end{array}$ est linéaire.

**La trace :** $\begin{array}{rccl} \mathrm{T}: & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{tr}\,(\mathrm{M}) \end{array}$ est une forme linéaire.

**Partie réelle, imaginaire, conjugaison :** sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires.

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{R}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \mathrm{Re}\,(z) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \mathfrak{I}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \mathrm{Im}\,(z) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} c: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$

**L'application limite :**

$$\begin{array}{rccl} \Lambda: & \left\{ \begin{array}{c} \text{suites convergentes} \\ \text{de } \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \end{array} \quad \text{est une forme linéaire.}$$

**L'application canonique associée à une matrice :** si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\begin{array}{rccl} f_{\mathrm{A}}: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

**La projection :** Soient $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$, ..., $\mathrm{E}_n$ des $\mathbb{K}$-ev.

$$\begin{array}{rccl} p_i: & \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n & \longrightarrow & \mathrm{E}_i \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ dans $\mathrm{E}_i$ appelée *projection* sur $\mathrm{E}_i$ (parallèlement aux $\mathrm{E}_j$, $j \neq i$).

**Exercice 8 :**

1. À quelle matrice est associée $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+2y\,;3x+4y\,;5x+6y) \end{array}$ ?
2. Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Correction :**

1. $\varphi(x\,;y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \\ 5x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\varphi$ est canoniquement associée à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
2. $$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 2x-z \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}.$$

## III.2 Le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E\,;F)$

**Proposition 17 :**

$(\mathscr{L}(E\,;F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev, sev de $(\mathscr{F}(E\,;F),+,\cdot)$.

**Preuve :**

— L'application nulle $\tilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire. Donc $\mathscr{L}(E\,;F) \neq \emptyset$.

— Supposons que $f, g \in \mathscr{L}(E\,;F)$. Montrons que $\forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E\,;F)$.

Posons $\phi = \lambda f + \mu g$.

$$\forall\ (x\,;x') \in \mathrm{E}^2,\ \forall\ (\alpha\,;\beta) \in \mathbb{K}^2,\quad \phi(\alpha x + \beta y) \underset{\text{Def de }\phi}{\underset{\uparrow}{=}} (\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y)$$
$$\underset{\mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\text{ est un }\mathbb{K}\text{-ev}}{\underset{\uparrow}{=}} \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y)$$
$$\underset{f,g\in\mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})}{\underset{\uparrow}{=}} \lambda[\alpha f(x) + \beta f(y)] + \mu[\alpha g(x) + \beta g(y)]$$
$$\underset{\mathcal{F}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\text{ est un }\mathbb{K}\text{-ev}}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y)$$
$$\underset{\text{Def de }\phi}{\underset{\uparrow}{=}} \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$$

Donc, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ qui est donc stable par combinaisons linéaires donc un $\mathbb{K}$-ev.

**Exercice 9 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si, pour tout $x$ de E, la famille $(x, f(x))$ est liée, alors $f$ est une homothétie.

**Correction :** La seule difficulté est de rendre $f$ indépendante de la constante $\lambda$ dans l'écriture $f(x) = \lambda_x x$. On utilise la seule information que l'on ait :

Pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, $\exists\, \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

— Si $x$ et $y$ sont colinéaires, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu y$ qui entraîne $\lambda_x x = \mu\lambda_y y = \lambda_y x$ avec $x$ non nul.

  Donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ indépendant de $x$ et $y$ et $f$ est une homothétie.

— Si $x$ et $y$ ne sont pas colinéaires alors on a $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ mais aussi $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ où $\lambda_{x+y} \in \mathbb{K}$ par linéarité de $f$.

  D'où,
  $$\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y \iff \left(\lambda_x - \lambda_{x+y}\right) x = \left(\lambda_{x+y} - \lambda_y\right) y,$$
  qui contredit la non colinéarité de $x$ et $y$ si $\lambda_{x+y} - \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y$ sont non nuls.

  Encore une fois, on obtient $0 = \lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y$ puis $\lambda_x = \lambda_y$ et l'indépendance de $\lambda$ par rapport aux vecteurs de E.

  L'application $f$ est encore une homothétie.

Conclusion, $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ telle que $\forall\, x \in \mathrm{E},\ f(x) = \lambda x$. C'est une homothétie de E.

### III.3 Composition d'applications linéaires

**Proposition 18 :**
1. La composée d'applications linéaires est une application linéaire.

   En particulier, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$.
2. La composée est elle-même bilinéaire :

   En effet, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ alors :
   - $h \longmapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à droite)**.
   - $h \longmapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathscr{L}(\mathrm{F}\,;\mathrm{G})$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})$ **(linéarité à gauche)**.

**Remarque :** $h \longmapsto g \circ h \in \mathscr{L}\Big(\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})\,;\mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{G})\Big)$.

**Preuve :**
1. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{E}^2, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y))\\ &= g(\lambda f(x) + \mu f(y))\\ &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y))\\ &= \lambda (g \circ f)(x) + \mu (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

   D'où $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.
2. Easy...

### III.4 Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre $\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et satisfait à la loi externe : $\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g$.

On dit alors que $(\mathscr{L}(\mathrm{E}), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, non intègre et non commutative. Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \ldots + +a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on peut aussi définir le *polynôme d'endomorphisme* $\mathrm{P}(f) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par :

$$\mathrm{P}(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \quad \text{où } f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E},\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ \ldots$$

**Exemples 20 :** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- Si $\mathrm{P} = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathrm{P}(f) = \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
- Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 6 = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}+3)$ alors $\mathrm{P}(f) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_\mathrm{E} = (f - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f + 3\mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

**Exemples 21 :**

— Si $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

— Si $u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ alors $u^2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$ et $u^2 = 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

**Proposition 19 :**
Soient $(f\,; g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

ATTENTION

Les écritures $f^k g^{n-k}$ et $(f-g)\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$ sont respectivement à comprendre $f^k \circ g^{n-k}$ et $(f-g) \circ \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$.

**Remarque :** Les homothéties $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

**Exemples 22 :** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, on a :

$$(f+\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f-\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$\mathrm{Id} - f_{\mathrm{E}}^n = (\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + f + f^2 + \cdots + f^{(n-1)}\right).$$

**Exercice 10 :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

1. Montrer que $u$ est un automorphisme de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \ker\,(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker\,(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

**Correction :**

1. Comme avec les matrices, $u \circ \left( \underbrace{-\frac{1}{2}(u - 3\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})}_{\in \mathscr{L}(\mathrm{E})} \right) = \left(-\frac{1}{2}(u - 3\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})\right) \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ donc $u$ est inversible. Linéaire, c'est un automorphisme de $\mathrm{E}$.
2. On sait déjà que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ sont des sev de $\mathrm{E}$.

   Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \cap \ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$. Par définition, $f(x) = x = 2x$, ce qui n'est possible que si $x = 0$. L'intersection des deux sev est donc réduite à $\{0\}$. La somme est directe.

   En reconnaissant $(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \circ (u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $x = \underbrace{2x - u(x)}_{x_1} \underbrace{- u(x) + x}_{x_2}$ avec

$$\begin{cases} (u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(2x - u(x)) = 0_{\mathrm{E}} \implies x_1 \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \\ (u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(x - u(x)) = 0_{\mathrm{E}} \implies x_2 \in \ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \end{cases}$$

   Les sev $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ sont donc aussi générateurs de $\mathrm{E}$ :

$$\mathrm{E} = \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) + \ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

   Avec la somme directe, on en déduit qu'ils y sont supplémentaires :

$$\mathrm{E} = \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}).$$

# IV/ Noyau et image d'une application linéaire

## IV.1 Images directe et réciproque d'un sev

**Proposition 20 :**
Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}$, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. Pour tout sev $\mathrm{E}_1$ de $\mathrm{E}$, l'ensemble $f(\mathrm{E}_1)$ est un sev de $\mathrm{F}$.
2. Pour tout sev $\mathrm{F}_1$ de $\mathrm{F}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{F}_1)$ est un sev de $\mathrm{E}$.

**ATTENTION** | La notation $f^{-1}$ est à prendre comme l'image réciproque par $f$ ici.

**Preuve :**

1. — $\mathrm{E}_1$ est un sev donc $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{E}_1$ et $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}} \in f(\mathrm{E}_1)$ *i.e.* $f(\mathrm{E}_1) \neq \emptyset$.
   — Supposons que $x', y' \in f(\mathrm{E}_1)$. On peut écrire $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ avec $x, y \in \mathrm{E}_1$.

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda x' + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$.

   Or, $\mathrm{E}_1$ est un sev de $\mathrm{E}$.

   Donc, $\lambda x + \mu y \in \mathrm{E}_1$ *i.e.* $f(\lambda x + \mu y) \in f(\mathrm{E}_1)$.

2. — $F_1$ est un sev donc $0_F \in F_1$.

   Comme $f(0_E) = 0_F \in F_1$, on a $0_E \in f^{-1}(F_1)$ *i.e.* $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$.

   — Soient $x, y \in f^{-1}(F_1)$. On a donc $f(x) \in F_1$ et $f(y) \in F_1$.

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in F_1$ car $F_1$ est un sev de F.

   Donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(F_1)$ qui est donc un sev de E.

## IV.2 Noyau et image d'une application linéaire

La proposition (20) nous encourage à nous intéresser à deux sev bien particuliers :

**Définition 11 :** Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E\,;F)$.

1. On appelle *noyau* de $f$, et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F.
$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\} \subset E.$$
2. On appelle *image* de $f$, et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par $f$ des vecteurs de E.
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F, \quad \exists x \in E, y = f(x)\} \subset F.$$

**Un peu d'histoire :** *Les lettres* ker *sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.*

**Contre-Exemple 23 :** Considérons l'endomorphisme $v : (x, y, z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$.

$v(1\,;-1\,;1) = (0\,;0\,;0)$ *i.e.* $(1\,;-1\,;1) \in \ker v$ sans qu'il soit nul.

Les éléments du noyau d'une application linéaire ne sont pas tous nuls. C'est là le point intéressant.

**À retenir 1 :**

- $\mathrm{Im}(u) = \{0_F\} \iff u = 0_{\mathscr{L}(E,F)} \iff \ker(u) = E$.
- Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors,
$$v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}(u) \subset \ker(v).$$

**Exemples 24 (Images) :**

— Soit $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 2x) \end{array}$ alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}((1,2))$ est représenté par la droite d'équation $y = 2x$ dans le plan.

— L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x+2y+z, 2x+y-z, x+2y+z)$ est le plan d'équation $z = x$.

**Exemples 25 (Noyaux) :**

— Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$.

— Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est l'application linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I.

— Si $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(a) \end{array}$, alors $\ker(f_a) = \{(\mathrm{X}-a)\mathrm{Q} \,/\, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$.

**Exemple 26 (Projection) :** Soit l'application linéaire définie par

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

**Noyau :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \ker p \iff p((x,y)) = (0,0)$
$\iff (x,0) = (0,0)$
$\iff x = 0.$

Donc, $\ker(p) = \{(0,y),\, y \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des ordonnées.

**Image :** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \operatorname{Im} p \iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, p((x_0,y_0)) = (x,y)$
$\iff \exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2, (x_0,0) = (x,y)$
$\iff y = 0.$

Donc, $\operatorname{Im}(p) = \{(x,0),\, x \in \mathbb{R}\}$ *i.e.* l'axe des abscisses.

**Proposition 21 :**
Soient E, F, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

1. $\ker(f)$ est un sev de E.
2. $\operatorname{Im}(f)$ est un sev de F.

**Preuve :**

1. Par définition, $\ker(f) = f^{-1}(\{0_{\mathrm{F}}\})$.

   Or, $\{0_{\mathrm{F}}\}$ est un sev de F.

   Donc, $\ker(f)$, image réciproque par une application linéaire d'un sev de F, est un sev de E.
2. Par définition, $\operatorname{Im}(f) = f(\mathrm{E})$.

CHAPITRE XXIII. ESPACES VECTORIELS

Or, $\mathrm{E}$ est un sev de $\mathrm{E}$.

Donc, $\mathrm{Im}\,(f)$, image directe par une application linéaire d'un sev de $\mathrm{E}$, est un sev de $\mathrm{F}$.

**Exercice 11 :** Déterminer le noyau de $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f''+4f. \end{array}$

**Correction :** On résout l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux pour trouver

$$\ker(\Phi) = \mathrm{vect}\,(x \longmapsto \cos(2x), x \longmapsto \sin(2x))\,.$$

### IV.3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires

**Théorème 22 :**
Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}$, deux $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathrm{F})$.

1. $f$ est injective $\iff \ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. $f$ est surjective $\iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{F}$.

***Réponse :*** *Un Kinder injectif car son noyau est réduit à zéro.*

**Preuve :**

1. $(\Rightarrow)$ Supposons que $f$ soit injective.

   Comme $f$ est linéaire, on a $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.

   D'où, $\{0_{\mathrm{E}}\} \subset \ker(f)$.

   Réciproquement, si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0_{\mathrm{F}} = f(0_{\mathrm{E}})$.

   Comme $f$ est injective, $x = 0_{\mathrm{E}}$, *i.e.* $\ker(f) \subset \{0_{\mathrm{E}}\}$.

   Par double inclusion, on a bien $\ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

   $(\Leftarrow)$ Supposons que $\ker(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et montrons que $f$ est injective.

   Considérons $x_1$, $x_2 \in \mathrm{E}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

   Alors $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) = 0_{\mathrm{F}}$ *i.e.* $x_1 - x_2 \in \ker(f)$ restreint à $\{0_{\mathrm{E}}\}$.

   Donc, $x_1 - x_2 = 0_{\mathrm{E}} \iff x_1 = x_2$ et $f$ est injective.
2. Cette assertion est plus simple à prouver :

$$f \text{ est surjective} \iff f(\mathrm{E}) = \mathrm{F} \iff \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{F}.$$

CHAPITRE XXIII. ESPACES VECTORIELS

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.

**Exemple 27 (Symétrie) :** Soit l'application linéaire définie par

$$\mathrm{S} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y). \end{array}$$

**Noyau :** $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \ker \mathrm{S} \iff p((x,y)) = (0,0).$
$$\iff (-x,y) = (0,0)$$
$$\iff (x,y) = (0,0)$$

Donc, $\ker(\mathrm{S}) = \{(0,0)\}$ et S est injective.

**Image :** De plus, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = \mathrm{S}((-x,y))$ *i.e.* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{S}) = \mathbb{R}^2$.

L'application S est donc surjective.

**Conclusion :** $\mathrm{S} \in \mathscr{G}l(\mathbb{R}^2)$.

**Exemples 28 :**

— Toute homothétie non nulle est surjective.

— $\mathrm{D} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' \end{array}$ n'est pas surjective.

— $\mathrm{T} : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([-1\,;1]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ n'est pas injective.

INDEX