

Espaces vectoriels

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 23



- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espace vectoriel
- 3 Applications linéaires
- 4 Noyau et image d'une application linéaire





La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes comme on a commencé à l'entrevoir dans les chapitres précédents.



Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices, ...



$\vec{\mathcal{P}}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
$3\vec{i} + 2\vec{j}$	$f - 2g$	$3P + 2Q$	$3A + 2B$	$3(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + 2(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$\vec{0}$	$x \mapsto 0_{\mathbb{R}}$	$0_{\mathbb{R}[X]}$	$(0)_{n,p}$	$(0)_{n \in \mathbb{N}}$

Figure 1 – Exemples d'espaces vectoriels

Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...



Au paragraphe (III) , on s'intéressera à une notion complètement fondamentale, celle d'**application linéaire**, qui va éclairer d'un jour nouveau tous les termes vus depuis le début de l'année et faisant intervenir ce fameux mot « linéaire ».

Globalement, les applications linéaires sont des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de mathématiques très divers.



E	T	$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y)$
$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'$	$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$
$\mathbb{R}[X]$	$P \mapsto P'$	$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
$\mathcal{C}^0(x_0)$	$f \mapsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
$\mathbb{R}^2$	$(x; y) \mapsto ax + by, a, b \in \mathbb{R}$	$a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') = \lambda(ax + by) + (ax' + by')$
$\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$	$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
$\left\{ \begin{array}{c} \text{Suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$
$\vec{\mathcal{P}}$ ou $\vec{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto \vec{a} \cdot \vec{x}$	$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{x}) + (\vec{a} \cdot \vec{y})$
$\overline{\mathcal{P}}$ ou $\overline{\mathcal{E}}$	$\vec{x} \mapsto [\vec{a}; \vec{x}]$	$[\vec{a}; \lambda \vec{x} + \vec{y}] = \lambda [\vec{a}; \vec{x}] + [\vec{a}; \vec{y}]$
$\mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f' + af, a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$(\lambda f + g)' + a(\lambda f + g) = \lambda(f' + af) + (g' + ag)$
$\mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R})$	$f \mapsto f'' + af' + bf, a, b \in \mathbb{R}$	$(\lambda f + g)'' + a(\lambda f + g)' + b(\lambda f + g) = \lambda(f'' + af' + bf) + (g'' + ag' + bg)$

Figure 2 – Applications linéaires et espaces vectoriels

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



I. Structure d'espace vectoriel

1 Structure d'espace vectoriel

- Généralités
- Espaces vectoriels de référence et fondamentaux
- Combinaisons linéaires

2 Sous-espace vectoriel

3 Applications linéaires

4 Noyau et image d'une application linéaire



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition I :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- Une loi de **composition interne** notée $+$ (l'addition) :

$$\begin{aligned} +_E : E \times E &\longrightarrow E \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y \end{aligned}$$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition I :

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

- Une loi de **composition interne** notée $+$ (l'addition) :

$$\begin{aligned} +_E : E \times E &\longrightarrow E \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y \end{aligned}$$

- Une loi de **composition externe**, notée $\cdot_E$ (la multiplication par un scalaire) :

$$\begin{aligned} \cdot_E : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en $\mathbb{K}$ -ev lorsque :

- ❶ $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en $\mathbb{K}$ -ev lorsque :

- ① $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*
 - ① $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,
 $(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z$.



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en $\mathbb{K}$ -ev lorsque :

- ❶ $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*
 - ❶ $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,
 $(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$
 - ❷ $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2, x +_E y = y +_E x.$



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

❶ $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

❷ $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,

$$(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$$

❸ $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.

❹ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

❶ $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

❶ $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,

$$(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$$

❷ $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.

❸ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

❹ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

❶ $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

❶ $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,

$$(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$$

❷ $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.

❸ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

❹ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

❷ La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

① $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

① $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,

$$(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$$

② $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.

③ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

④ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

② La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

① $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda \cdot_E (\mu \cdot_E x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x$: **compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$.**



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

① $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

- ① $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,
 $(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z$.
- ② $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.
- ③ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

- ④ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

② La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

- ① $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda \cdot_E (\mu \cdot_E x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x$: **compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .
- ② $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x = \lambda \cdot_E x +_E \mu \cdot_E x$: **compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

① $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

① $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,

$$(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z.$$

② $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.

③ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

④ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

② La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

① $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda \cdot_E (\mu \cdot_E x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x$: **compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .

② $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x = \lambda \cdot_E x +_E \mu \cdot_E x$: **compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .

③ $\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot_E (x +_E y) = \lambda \cdot_E x +_E \lambda \cdot_E y$: **compatibilité avec $+_E$ dans E** .



Définition 1 :

On dit que $(E, +_E, \cdot_E)$ est un **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** abrégé en **$\mathbb{K}$ -ev** lorsque :

① $(E, +_E)$ est un groupe abélien, *i.e.*

- ① $+_E$ est **associative** : $\forall (x; y; z) \in E^3$,
 $(x +_E y) +_E z = x +_E (y +_E z) = x +_E y +_E z$.
- ② $+_E$ est **commutative** : $\forall (x; y) \in E^2$, $x +_E y = y +_E x$.
- ③ $+_E$ admet un **élément neutre** noté 0_E et appelé **vecteur nul** :

$$\forall x \in E, \quad x +_E 0_E = 0_E +_E x = x.$$

- ④ Tout élément de E admet un **symétrique** pour $+_E$ appelé **opposé de x** et noté $-x$:

$$\forall x \in E, \quad x +_E (-x) = 0_E.$$

② La loi de composition externe vérifie les axiomes suivants :

- ① $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda \cdot_E (\mu \cdot_E x) = (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x$: **compatibilité avec $\times_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .
- ② $\forall x \in E, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot_E x = \lambda \cdot_E x +_E \mu \cdot_E x$: **compatibilité $+_{\mathbb{K}}$ dans $\mathbb{K}$** .
- ③ $\forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot_E (x +_E y) = \lambda \cdot_E x +_E \lambda \cdot_E y$: **compatibilité avec $+_E$ dans E** .
- ④ $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot_E x = x$: $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre pour $\cdot_E$.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition 1 :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E .



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition I :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E .
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition I :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E .
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le **corps de base** de l'espace vectoriel E .



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Définition I :

On appelle :

- **vecteurs** les éléments de E .
- **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

On dit que $\mathbb{K}$ est le **corps de base** de l'espace vectoriel E .

Ces conditions peuvent paraître complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique et on peut, en fait, les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_E$ et $\cdot_E$.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_E$ et $\cdot_E$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_E$ et $\cdot_E$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x + y$ signifie $(\lambda.x) + y$.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Remarques :

- S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera les lois $+$ et $\cdot$ au lieu de $+_E$ et $\cdot_E$.
- On notera que l'existence du vecteur nul implique que tout espace vectoriel E est non vide.
- Pour éviter des parenthèses, on définit une priorité de la loi externe sur la loi interne : $\lambda.x + y$ signifie $(\lambda.x) + y$.
- L'élément neutre de $(E; +)$ est unique.
En effet, supposant que l'on en ait deux e et e' alors :

$$\begin{array}{ccccc} e & = & e + e' & = & e' \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{def de } e' & & \text{def de } e & \end{array}$$

C'est un fait général.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

- De même, l'opposé d'un vecteur $x \in E$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et x'' alors on aurait :

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & x' + 0_E & = & x' + (x + x'') & = & (x' + x) + x'' \\ \uparrow \text{def de } 0_E & & \uparrow \text{def de } x'' & & \uparrow \text{associativité de } + & & \\ & = & 0_E + x'' & = & x'' & & \\ \uparrow \text{def de } x' & & \uparrow \text{def de } 0_E & & & & \end{array}$$

C'est également un fait général.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

- De même, l'opposé d'un vecteur $x \in E$ est unique. En effet, supposant qu'il en existe deux x' et x'' alors on aurait :

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & x' + 0_E & = & x' + (x + x'') & = & (x' + x) + x'' \\ \uparrow \text{def de } 0_E & & \uparrow \text{def de } x'' & & \uparrow \text{associativité de } + & & \\ & = & 0_E + x'' & = & x'' & & \\ \uparrow \text{def de } x' & & \uparrow \text{def de } 0_E & & & & \end{array}$$

C'est également un fait général.

- Si elle est non ambiguë, on allège en général l'écriture en notant λu plutôt que $\lambda \cdot \vec{u}$ pour λ un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur, même si la notation avec des flèches pour les vecteurs peut être utilisée dans un premier temps pour ne pas mélanger les objets. Les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ s'utilisent plutôt pour les scalaires que pour les vecteurs.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

ATTENTION

- Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul 0_E : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

ATTENTION

- Ne pas confondre le zéro des scalaires $0_{\mathbb{K}}$ avec le vecteur nul 0_E : s'il y a une ambiguïté, préciser la notation en indice ou mettre une flèche sur le vecteur.
- La loi $\cdot$ est une loi de multiplication externe : ce n'est pas le produit de deux vecteurs.



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

$$① \quad \forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

① $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$

② $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$

En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

- ❶ $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
- ❷ $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition I (Règles de calcul) :

① $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$

② $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$

En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$

③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$

④ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition I (Règles de calcul) :

- ❶ $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
- ❷ $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
- ❹ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
- ❺ $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0_E.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

- ❶ $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
- ❷ $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
- ❹ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
- ❺ $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0_E.$

Réciproquement, $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E,$

$$\lambda.x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E.$$

En particulier,



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

- ❶ $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
- ❷ $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
- ❹ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
- ❺ $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0_E.$

Réciproquement, $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E,$

$$\lambda.x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E.$$

En particulier,

- ❻ Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.x = \lambda.y \implies x = y.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Proposition 1 (Règles de calcul) :

- ❶ $\forall (x; x'; y) \in E^3, \quad x + y = x' + y \implies x = x'.$
- ❷ $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x).$
En particulier, $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x.$
- ❸ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
- ❹ $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
- ❺ $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0_E.$

Réciproquement, $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E,$

$$\lambda.x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E.$$

En particulier,

- ❻ Si $\lambda \neq 0$, alors $\forall (x; y) \in E^2, \quad \lambda.x = \lambda.y \implies x = y.$
- ❼ Si $x \neq 0_E$, alors $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda.x = \mu.x \implies \lambda = \mu.$



I. Structure d'espace vectoriel

1. Généralités

Exercice I :

Soit E un $\mathbb{R}$ ev. On munit l'ensemble $F = E \times E$ de l'addition usuelle et on définit une loi de composition externe $\cdot$ par $(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ ev.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathbb{K}$: L'ensemble $\mathbb{K}$ muni de son addition et de sa multiplication est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ et muni des lois :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x; y) &\longmapsto x + y = x +_{\mathbb{K}} y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot x = \lambda \times_{\mathbb{K}} x. \end{aligned}$$

Proposition 2 :

$(\mathbb{K}; +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

En particulier, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On peut voir aussi $\mathbb{C}$ est comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel si on le munit de son addition et de la loi externe :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda; z) &\longmapsto \lambda \cdot z = \lambda z \quad (\text{produit dans } \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Remarque : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas des $\mathbb{R}$ -ev.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathbb{K}^n$: L'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^2$ des vecteurs du plan (de même que l'ensemble $\vec{\mathcal{E}}^3$ des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (encore heureux!).

On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan. On y reviendra dans le chapitre sur les applications linéaires.

De manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{K}^n$ les lois :

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n && \longrightarrow && \mathbb{K}^n \\ & ((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) && \longmapsto && (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n && \longrightarrow && \mathbb{K}^n \\ & (\lambda; (x_1, x_2, \dots, x_n)) && \longmapsto && (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

Proposition 3 :

L'ensemble $(\mathbb{K}^n; +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où le vecteur nul est $\overrightarrow{0_{\mathbb{K}^n}} = (0, 0, \dots, 0)$.

I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

E^n : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n espaces vectoriels $(E_1; +_{E_1}; \cdot_{E_1})$, ..., $(E_n; +_{E_n}; \cdot_{E_n})$ tous sur $\mathbb{K}$ et le produit cartésien

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) / \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in E_i \right\}.$$

On définit sur E les lois :

$$\begin{aligned} + : \quad E \times E &\longrightarrow E \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 +_{E_1} y_1, x_2 +_{E_2} y_2, \dots, x_n +_{E_n} y_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda; (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\longmapsto (\lambda \cdot_{E_1} x_1, \lambda \cdot_{E_2} x_2, \dots, \lambda \cdot_{E_n} x_n) \end{aligned}$$

Proposition 4 :

L'ensemble $(E; +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où le vecteur nul est $\vec{0}_E = (\vec{0}_{E_1}, \vec{0}_{E_2}, \dots, \vec{0}_{E_n})$.

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E^n est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si $E = \mathbb{K}$, on retrouve ainsi que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exemple 1 :

Si on note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$ alors, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda \cdot_E x +_E y = \begin{pmatrix} \lambda \cdot_{E_1} x_1 +_{E_1} y_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot_{E_n} x_n +_{E_1} y_n \end{pmatrix}.$$



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ; (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) &\longmapsto (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \left(\lambda ; (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) &\longmapsto \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}. \end{aligned}$$

Ainsi doté,

Proposition 5 :

L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des lois :

$$+ : \quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$\left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ; (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \longmapsto (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

et

$$\cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$\left(\lambda ; (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right) \longmapsto \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Proposition 5 :

L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Le vecteur nul est la matrice nulle $\overrightarrow{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}} = (0)_{n,p}$.

ATTENTION

Toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathcal{F}(\Omega; E)$: Soient Ω un ensemble et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(\Omega; E)$, noté aussi E^Ω des fonctions de Ω à valeurs dans E peut être munis des lois :

$$+ : E^\Omega \times E^\Omega \longrightarrow E^\Omega$$

$$(f; g) \longmapsto f+g : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & & f(x) +_E g(x) \end{array}$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times E^\Omega \longrightarrow E^\Omega$$

$$(\lambda; f) \longmapsto \lambda.f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & & \lambda \cdot_E f(x) \end{array}$$

Proposition 6 :

Si Ω est non vide alors l'ensemble $(\mathcal{F}(\Omega; E); +; \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0_{\mathcal{F}(\Omega; E)}}$ est la fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\Omega; E)} : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array}$.

I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Si $\Omega = \mathbb{R} = \mathbb{K}$, on en déduit, par exemple, que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Les fonctions $\cos$, $\exp$, ... sont des exemples de vecteurs de cet espace vectoriel.

ATTENTION

$\mathcal{F}(\Omega; Y)$ n'est, en général, pas un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pour les mêmes lois) si Y n'est pas un $\mathbb{K}$ -ev.

Comme conséquence avec $\Omega = \mathbb{N}$, on retrouve aussi la propriété suivante prouvée dans un chapitre précédent :

Corollaire I :

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel dont le vecteur nul est la suite constante égale à $0_{\mathbb{K}}$.

La somme de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et le produit d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par un réel λ étant la suite $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

$\mathbb{K}[X]$: L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de vecteur nul le polynôme nul et muni des lois :

$$+ : \quad \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}[X]$$

$$\left(\sum_{k \geq 0} a_k X^k ; \sum_{k \geq 0} b_k X^k \right) \longmapsto \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k) X^k$$

et

$$\cdot : \quad \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}[X]$$

$$\left(\lambda ; \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right) \longmapsto \lambda \cdot \sum_{k \geq 0} a_k X^k = \sum_{k \geq 0} (\lambda a_k) X^k.$$

En particulier, on a également vu que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.

ATTENTION

L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un espace vectoriel.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- 1 $\{0\}$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

❶ $\{0\}$.

❷ $\emptyset$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- ❶ $\{0\}$.
- ❷ $\emptyset$.
- ❸ $\{0, 1\}$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- ❶ $\{0\}$.
- ❷ $\emptyset$.
- ❸ $\{0, 1\}$.
- ❹ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- ❶ $\{0\}$.
- ❷ $\emptyset$.
- ❸ $\{0, 1\}$.
- ❹ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$.
- ❺ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$.



I. Structure d'espace vectoriel

2. Espaces vectoriels de référence et fondamentaux

Exercice 2 :

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

- ❶ $\{0\}$.
- ❷ $\emptyset$.
- ❸ $\{0, 1\}$.
- ❹ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}$.
- ❺ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}$.
- ❻ $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est croissante}\}$.



I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Définition 2 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$.

On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_p \cdot x_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot x_k.$$



I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Définition 2 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$.

On dit que $x \in E$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ de E s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_p \cdot x_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot x_k.$$

- Soit X une partie de E .

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si x est combinaison linéaire d'une famille **finie** de vecteurs de X .



I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

ATTENTION

Il n'y a pas, a priori, unicité des coefficients sans hypothèses supplémentaires sur $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^p \mu_k x_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \lambda_k = \mu_k.$$



I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u .

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u .
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos 3x$.

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u .
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos 3x$.
- Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leq k \leq n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Plus précisément, $f \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u .
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos 3x$.
- Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leq k \leq n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Plus précisément, $f \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

I. Structure d'espace vectoriel

3. Combinaisons linéaires

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $4\vec{i} - 7\vec{j}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $(1; 2; 0)$ est combinaison linéaire de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 0)$, mais pas de $(1; 1; 0)$ et $(0; 1; 1)$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de 0_E est $\{0_E\}$.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de u est $\mathbb{K}u = \{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{K}\}$. C'est une droite vectorielle engendrée par u .
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ch et sh sont combinaisons linéaires de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$, $\cos^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos 3x$.
- Si $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ alors les combinaisons linéaires des fonctions e_k pour $0 \leq k \leq n$ sont les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .
Plus précisément, $f \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs de X si, et seulement si f est une fonction polynomiale.

- Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $E_{i,j}$ pour $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$.

II. Sous-espace vectoriel

1 Structure d'espace vectoriel

2 Sous-espace vectoriel

- Sous-espace engendré par une partie finie
- Somme de deux sous-espaces vectoriels
- Somme directe
- Sous-espaces supplémentaires

3 Applications linéaires

4 Noyau et image d'une application linéaire



II. Sous-espace vectoriel

Définition 3 :

Soit $(E; +_E; \cdot_E)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** , abrégé souvent en **sev** lorsque :

- $F \neq \emptyset$



II. Sous-espace vectoriel

Définition 3 :

Soit $(E; +_E; \cdot_E)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** , abrégé souvent en **sev** lorsque :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x; y) \in F^2, \quad x +_E y \in F$ (stabilité de F pour $+_E$)



II. Sous-espace vectoriel

Définition 3 :

Soit $(E; +_E; \cdot_E)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** , abrégé souvent en **sev** lorsque :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x; y) \in F^2, \quad x +_E y \in F$ (stabilité de F pour $+_E$)
- $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot_E x \in F$ (stabilité de F pour $\cdot_E$)



II. Sous-espace vectoriel

Définition 3 :

Soit $(E; +_E; \cdot_E)$ un $\mathbb{K}$ -ev et $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel de E** , abrégé souvent en **sev** lorsque :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x; y) \in F^2, \quad x +_E y \in F$ (stabilité de F pour $+_E$)
- $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot_E x \in F$ (stabilité de F pour $\cdot_E$)

Exemple 3 :

Si E est un $\mathbb{K}$ -ev alors $\{0_E\}$ et E sont des sev de E (appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E).

Ce sont, respectivement, le plus petit et le plus grand sev au sens de l'inclusion.



II. Sous-espace vectoriel

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$



II. Sous-espace vectoriel

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_E ne pourra être un sev de E .



II. Sous-espace vectoriel

Remarque : Tout sous-espace F de E contient le vecteur 0_E : en effet, $F \neq \emptyset$ contient au moins un élément x et son symétrique d'où

$$0_E = \underbrace{x +_E (-x)}_{\in E} \in F.$$

En conséquence, pour montrer qu'un sev F de E est non vide, on cherchera souvent à montrer que $0_E \in F$. A contrario, une partie ne contenant pas 0_E ne pourra être un sev de E .

ATTENTION

Aucun $\mathbb{K}$ -ev, $\mathbb{R}$ -ev, $\mathbb{C}$ -ev ou sev n'est vide !!!!



II. Sous-espace vectoriel

Corollaire 2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (x; y) \in F^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$



II. Sous-espace vectoriel

Corollaire 2 (Stabilité d'un sev par combinaisons linéaires) :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (x; y) \in F^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda.x + \mu.y \in F. \end{cases}$$

Remarque : Mieux, on vérifiera que montrer que F est stable par des combinaisons linéaires du type $\lambda.x + y$ est équivalent à montrer que F est stable par combinaisons linéaires.



II. Sous-espace vectoriel

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$\begin{aligned} +_F : F \times F &\longrightarrow F & \text{et} & \quad \cdot_F : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y & (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Ces lois s'appellent les **lois induites** sur F (par celles de E) ou les restrictions des lois de E à F . C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.



II. Sous-espace vectoriel

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$\begin{aligned} +_F : F \times F &\longrightarrow F & \text{et} & \quad \cdot_F : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y & (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Ces lois s'appellent les **lois induites** sur F (par celles de E) ou les restrictions des lois de E à F . C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 1 :

Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +_E; \cdot_E)$.

Alors, $(F; +_F; \cdot_F)$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$ -ev.



II. Sous-espace vectoriel

Le corollaire (2) nous entraîne à considérer les lois :

$$\begin{aligned} +_F : F \times F &\longrightarrow F & \text{et} & \quad \cdot_F : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F \\ (x; y) &\longmapsto x +_E y & (\lambda; x) &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Ces lois s'appellent les **lois induites** sur F (par celles de E) ou les restrictions des lois de E à F . C'est un cas général de considérer de telles lois afin de faire hériter le sous-espace de la structure de l'espace parent.

Théorème 1 :

Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +_E; \cdot_E)$.

Alors, $(F; +_F; \cdot_F)$ muni des lois induites de E sur F est un $\mathbb{K}$ -ev.

Considérant une sous-partie F (non vide nécessairement) d'un $\mathbb{K}$ -ev E , une des grandes conséquences de ce théorème est qu'il ne nous sera plus nécessaire de montrer les 9 critères de la **définition (1)** mais seulement de démontrer que F est un sev de E .



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $P = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $P = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $O(0;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $O(0;0;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $P = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $O(0;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $O(0;0;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble $F = \{(0, y, y, t) / (y; t) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 4 (En géométrie) :

- On considère un vecteur géométrique non nul de l'espace : $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- On considère deux vecteurs géométriques non nuls de l'espace : $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_3$.
L'ensemble $P = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\vec{\mathcal{E}}_3$.
- Dans le plan, une droite $(\mathcal{D})$ passant par $O(0;0)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.
Dans l'espace, une droite $(\mathcal{D})$ ou un plan $(\mathcal{P})$ passant par $O(0;0;0)$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
- L'ensemble $F = \{(0, y, y, t) / (y; t) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x; y; z) / x + y + z = 0\}$ est un sev mais l'ensemble $G = \{(x; y; z) / x + y + z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel!).



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{K}$ ev vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \dots \subset \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{n+1}[X] \subset \dots \subset \mathbb{K}[X].$$



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 5 (Dans les espaces de fonctions) :

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Les ensembles $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ sont tous des sev de l'ensemble $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Ils forment même une suite de sev pour l'inclusion.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev du $\mathbb{K}$ ev vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
On retrouve une suite de sev pour l'inclusion :

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \dots \subset \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{n+1}[X] \subset \dots \subset \mathbb{K}[X].$$

Remarque : La relation « être un sev » est transitive.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 6 (Dans les espaces de matrices) :

Les ensembles

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales,
- $\mathcal{T}_{n,S}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_{n,I}(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques,
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques,

sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 7 (Dans l'espace des suites) :

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 7 (Dans l'espace des suites) :

Notons $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$ ev des suites réelles.

- L'ensemble $\mathcal{S}_b$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{S}$.
- L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des suites convergentes est un sev de $\mathcal{S}_b$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.
Plus précisément,



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.

Plus précisément,

- $\left\{ y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \mid y' + a(x)y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.

Plus précisément,

- $\left\{ y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \mid y' + a(x)y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$.
- $\left\{ y \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R}) \mid y'' + ay' + by = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$.



II. Sous-espace vectoriel

Exemples 8 (Et bien d'autres) :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I , d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$.

Plus précisément,

- $\left\{ y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) \mid y' + a(x)y = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$.
- $\left\{ y \in \mathcal{C}^2(I; \mathbb{R}) \mid y'' + ay' + by = 0 \right\}$ est un sev de $\mathcal{C}^2(I; \mathbb{R})$.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires est un sev du $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes.



II. Sous-espace vectoriel

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le [paragraphe \(2\)](#) .



II. Sous-espace vectoriel

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}$



II. Sous-espace vectoriel

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$



II. Sous-espace vectoriel

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$



II. Sous-espace vectoriel

Tout ceci pour dire que pour montrer qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on montrera systématiquement qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'un des exemples de référence vus dans le paragraphe (2) .

Exercice 3 :

Quels sont parmi les ensembles suivants, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles ?

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}$
- $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(E; +; \cdot)$?

On donne la réponse dans ce paragraphe.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(E; +; \cdot)$?

On donne la réponse dans ce paragraphe.

Soit X une partie d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

Définition 4 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v. et X une partie de E .

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X , noté $\text{vect}(X)$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X .

On convient que $\text{vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Tous les sous-espaces de E sont-ils des sev de E ? La réponse est bien évidemment non mais comment régler ce problème et rajouter un peu de stabilité pour les lois de $(E; +; \cdot)$?

On donne la réponse dans ce paragraphe.

Soit X une partie d'un espace vectoriel $(E; +; \cdot)$. On cherche le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X (pour l'inclusion).

Définition 4 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v. et X une partie de E .

On appelle sous-espace vectoriel engendré par X , noté $\text{vect}(X)$ le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant X .

On convient que $\text{vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Exemple 9 :

Dans le plan, si $X = \{\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors ce s.e.v est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$:

$$(\mathcal{D}) = \{\lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Toute la question est de savoir déterminer, s'il existe, ce plus petit sev.
Cherchons la réponse du côté de l'intersection des sev contenant cette partie.
Une intersection de sev est-elle déjà un sev ? La réponse est oui !

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E .



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Toute la question est de savoir déterminer, s'il existe, ce plus petit sev.
Cherchons la réponse du côté de l'intersection des sev contenant cette partie.
Une intersection de sev est-elle déjà un sev ? La réponse est oui !

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 10 :

- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 10 :

- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
- $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 10 :

- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
- $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Proposition 8 (Intersection de sous-espaces vectoriels) :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ d'une famille non vide de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in I}$ de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 10 :

- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P(2) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.
- $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = 0\}$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ATTENTION

La réunion de sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel!!!

Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abscisses et G l'axe des ordonnées, $(1; 0)$ et $(0; 1)$ sont dans $F \cup G$ mais pas $(1; 1) = (1; 0) + (0; 1)$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exercice 4 :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E un espace vectoriel.

Montrer que :

$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff (F \subset G) \text{ ou } (G \subset F)$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E .

On note $\text{vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X .

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E .

On note $\text{vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X .

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

❶ F est un sev de E si, et seulement si $F = \text{vect}(F)$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Définition/Théorème 5 (Sev engendré par une partie) :

Soit X une partie de E .

On note $\text{vect}(X)$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant X .

C'est l'intersection de tous les sev contenant X :

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev} \\ X \subset F}} F.$$

Toute d'abord deux propriétés simples mais importantes découlant de la définition par superlatif :

Proposition 9 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

- ① F est un sev de E si, et seulement si $F = \text{vect}(F)$.
- ② Pour toutes parties X et Y de E , $X \subset Y \implies \text{vect}(X) \subset \text{vect}(Y)$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exercice 5 :

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_1 : t \mapsto e^t$ et $f_2 : t \mapsto e^{-t}$.

Montrer que $\text{vect}(f_1, f_2) = \text{vect}(\text{ch}, \text{sh})$.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Faisons enfin le lien avec l'intérêt majeur de la structure : les combinaisons linéaires.

Théorème 10 :

Soient $(E; +) \cdot$ un $\mathbb{K}$ -ev X une partie non vide de E .

$\text{vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X .

Quoi de plus naturel que de former toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de X pour obtenir le plus petit sous-ensemble stable par combinaisons linéaires d'éléments de X ?



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Théorème 10 :

Soient $(E; +) \cdot$ un $\mathbb{K}$ -ev X une partie non vide de E .

$\text{vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs de X .

Exemple II (IMPORTANT) :

Si $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est finie, on note $\text{vect}(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$ ou plus simplement $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On a alors égalité :

$$\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n \mid (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

En particulier et à retenir,

$$x \in \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) \iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i.$$



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,
- $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,

- $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,

- $\text{vect}(i) = i\mathbb{R}$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

■ Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,

- $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,

- $\text{vect}(i) = i\mathbb{R}$.

■ Dans le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$, $\text{vect}(1) = \text{vect}(i) = \mathbb{C}$.

II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,
 - $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,
 - $\text{vect}(i) = i\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$, $\text{vect}(1) = \text{vect}(i) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{vect}(\vec{u}; \vec{v})$ est un plan vectoriel.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,
 - $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,
 - $\text{vect}(i) = i\mathbb{R}$.
- Dans le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$, $\text{vect}(1) = \text{vect}(i) = \mathbb{C}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{vect}(\vec{u}; \vec{v})$ est un plan vectoriel.
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.



II. Sous-espace vectoriel

1. Sous-espace engendré par une partie finie

Exemples 12 :

- Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$,

- $\text{vect}(1) = \mathbb{R}$,

- $\text{vect}(i) = i\mathbb{R}$.

- Dans le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$, $\text{vect}(1) = \text{vect}(i) = \mathbb{C}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors $\text{vect}(\vec{u}; \vec{v})$ est un plan vectoriel.

- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par $X = \{e_n : x \mapsto x^n / n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions polynomiales.

- Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles satisfaisant

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

est un sev.

Mieux, en notant $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on sait que :

$$\mathcal{S} = \text{vect}((r_+^n)_{n \in \mathbb{N}}; (r_-^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E , $F \cup G$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition 6 :

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

Si F et G sont deux sev de E , on appelle **somme** de F et G , notée $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{x + y / (x; y) \in F \times G\}.$$



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E , $F \cup G$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition $\hook$:

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

Si F et G sont deux sev de E , on appelle **somme** de F et G , notée $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{x + y / (x; y) \in F \times G\}.$$

En particulier, écrire $E = F + G$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$E = F + G \iff \forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

On avait déjà vu que, considérant deux sev F et G de E , $F \cup G$ n'était pas un sev. Cherchons un sev capable de les contenir tous les deux :

Définition $\hook$:

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

Si F et G sont deux sev de E , on appelle **somme** de F et G , notée $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{x + y \mid (x, y) \in F \times G\}.$$

En particulier, écrire $E = F + G$ signifie que tout vecteur de E peut se décomposer comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$E = F + G \iff \forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G.$$

ATTENTION

Il n'y a pas toujours unicité dans cette écriture. Si oui, on parlera alors de somme directe.



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E , $F + G$ est un sev de E .



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E , $F + G$ est un sev de E .

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E , $F + G$ est un sev de E .

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E , $F + G$ est un sev de E .

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition II :

Pour tous sous-espaces F et G de E , $F + G$ est un sev de E .

Exemple 13 :

Soient deux vecteurs (géométriques) $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{\mathcal{E}}^3$. On pose $(\mathcal{D}) = \mathbb{R}\vec{u}$ et $(\mathcal{D}') = \mathbb{R}\vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}') = (\mathcal{D})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $(\mathcal{D}) + (\mathcal{D}')$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dit autrement, le sev engendré par la réunion de deux droites vectorielles non parallèles est un plan vectoriel.

Remarque : $F + F = F$!



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

$$\text{vect}(F \cup G) = F + G.$$



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

$$\text{vect}(F \cup G) = F + G.$$

Remarque : $F + G$ est donc le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant $F \cup G$.



II. Sous-espace vectoriel

2. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Quid du rapport entre $F + G$ et $F \cup G$? S'il ne peuvent être égaux, l'un contient l'autre et mieux encore :

Théorème 12 :

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

$$\text{vect}(F \cup G) = F + G.$$

Remarque : $F + G$ est donc le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant $F \cup G$.

En particulier,

$$\text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n) + \text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m)$$



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Définition 1 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, lorsque tout élément de $F + G$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

$$\forall z \in F \oplus G, \exists ! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Définition 1 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, lorsque tout élément de $F + G$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

$$\forall z \in F \oplus G, \exists ! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Proposition B :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +; \cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 F et G sont en somme directe.



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Définition 1 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, lorsque tout élément de $F + G$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

$$\forall z \in F \oplus G, \exists ! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Proposition B :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +; \cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ F et G sont en somme directe.
- ❷ $\forall (x; x') \in F^2, \forall (y; y') \in G^2, x + y = x' + y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$

II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Définition 1 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, lorsque tout élément de $F + G$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

$$\forall z \in F \oplus G, \exists ! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Proposition B :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +; \cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ F et G sont en somme directe.
- ❷ $\forall (x; x') \in F^2, \forall (y; y') \in G^2, x + y = x' + y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$
- ❸ $\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \implies x = y = 0_E.$



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Définition 1 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, lorsque tout élément de $F + G$ se décompose **de manière unique** en la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

$$\forall z \in F \oplus G, \exists ! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Proposition 13 :

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -ev $(E; +; \cdot)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ F et G sont en somme directe.
- ❷ $\forall (x; x') \in F^2, \forall (y; y') \in G^2, x + y = x' + y' \implies x = x' \quad \text{et} \quad y = y'.$
- ❸ $\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \implies x = y = 0_E.$
- ❹ $F \cap G = \{0_E\}$

II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

ATTENTION

$F \cap G = \{0_E\}$ et non $\emptyset$!!!!!



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Exercice 6 :

Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

- ① $F = \mathbb{K}\vec{u}$ et $G = \mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u} + \mathbb{K}\vec{v} = \mathbb{K}\vec{u} \oplus \mathbb{K}\vec{v} = \text{vect} (u; v)$.



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Exercice 6 :

Montrer que les sev F et G sont en somme directe avec :

- ❶ $F = \mathbb{K}\vec{u}$ et $G = \mathbb{K}\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Dans ce cas, $\mathbb{K}\vec{u} + \mathbb{K}\vec{v} = \mathbb{K}\vec{u} \oplus \mathbb{K}\vec{v} = \text{vect}(u; v)$.
- ❷ $F = \text{vect}(1, X)$ et $G = \text{vect}(1, X^2)$.



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, F_2, \dots, F_n$.

$$\forall x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \dots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, F_2, \dots, F_n$.

$$\forall x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \dots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$

Théorème 14 :

Il y a équivalence entre :

- 1 La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est directe.

II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

La notion de somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E se généralise au cas de plusieurs sous-espaces.

Définition 8 :

On dit que la somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est directe si, et seulement si tout élément de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, F_2, \dots, F_n$.

$$\forall x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

La somme directe de $F_1, F_2, \dots, F_n$ est notée : $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$

Théorème 14 :

Il y a équivalence entre :

- ① La somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est directe.
- ② $\forall p \in \mathbb{N}, 2 \leq p \leq n, (F_1 + F_2 + \dots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0\}$.

II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Remarque : Si $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n, \forall q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq n, p \neq q : F_p \cap F_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.



II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

Remarque : Si $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est une somme directe alors la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq n, \forall q \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq n, p \neq q : F_p \cap F_q = \{0\}.$$

Mais cette condition (qui est nécessaire) pour que la somme soit directe n'est pas suffisante.

Contre-Exemple 14 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soient $F = \text{vect}((1, 0))$, $G = \text{vect}((0, 1))$ et $H = \text{vect}((1, 1))$.

Il est immédiat que $F \cap G = \{0\}$, $G \cap H = \{0\}$ et $F \cap H = \{0\}$, et pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

En effet l'élément $(1, 1)$ de $F + G + H$ se décompose en somme d'éléments de F, G et H de la manière suivante :

$$(1, 1) = (0, 0) + (0, 0) + (1, 1)$$

mais aussi de la manière suivante :

$$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) + (0, 0).$$

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture.

II. Sous-espace vectoriel

3. Somme directe

ATTENTION

Dans le cas de plusieurs sous-espaces vectoriels, le fait que les sous-espaces aient deux à deux une intersection réduite au vecteur nul n'est pas une condition suffisante pour que la somme soit directe.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Définition 9 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** (dans E) si $E = F \oplus G$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Définition 9 :

Soient $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -ev, F, G deux sev de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** (dans E) si $E = F \oplus G$.

En particulier, $E = F \oplus G \iff \forall z \in E, \exists! (x; y) \in F \times G, \quad z = x + y.$



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

En conclusion,

ATTENTION

Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Pour être précis, les vecteurs de $F + G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $E \setminus (F + G)$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E , c'est affirmer en plus que $E = F + G$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

En conclusion,

ATTENTION

Ne confondez pas « en somme directe » et « supplémentaires dans E ».

Dire que F et G sont en somme directe, c'est affirmer que tout vecteur de E a AU PLUS UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Pour être précis, les vecteurs de $F + G$ ont alors exactement une décomposition de cette forme tandis que les éléments de $E \setminus (F + G)$ n'en ont pas.

Dire que F et G sont supplémentaires dans E , c'est affirmer en plus que $E = F + G$, c'est donc affirmer que tout vecteur de E possède EXACTEMENT UNE décomposition comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Un sous-espace vectoriel possède-t-il toujours un supplémentaire ? La réponse est oui, mais nous le démontrerons un peu plus loin seulement en dimension finie (quand nous saurons ce que ça veut dire).



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
 - ◇ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
 - ◇ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
 - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
 - ◇ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
 - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
 - ◊ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
 - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exemples 15 :

- Dans $\vec{\mathcal{E}}^2$, si $(\vec{i}, \vec{j})$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} = \vec{\mathcal{E}}^2$.
 - ◊ $\mathbb{R}\vec{i}$ admet d'autres supplémentaires comme $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
 - $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ restent en somme directe dans $\vec{\mathcal{E}}^3$ mais n'y sont plus supplémentaires.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Proposition 15 (Caractérisation de la somme directe) :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

Exemple 16 :

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1; 0)$ et $e_2 = (-1; 1)$.

Montrons que $E = \text{vect}(e_1) \oplus \text{vect}(e_2)$.

Soit $(x; y) \in E$. Cherchons $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x; y) = a.e_1 + b.e_2$.

Or,

$$(x; y) = a.e_1 + b.e_2 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = x + y \\ b = y \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, donc la somme est directe
i.e. $\mathbb{R}^2 = \text{vect}(e_1) \oplus \text{vect}(e_2)$.

II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
 - $G = \text{vect}((1; 1; 1))$.
- ❶ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
 - $G = \text{vect}((1; 1; 1))$.
- ❶ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- ❷ On pose également $H = \text{vect}((1; 0; 0))$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

■ $F = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$

■ $G = \text{vect}((1; 1; 1)).$

❶ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$

❷ On pose également $H = \text{vect}((1; 0; 0)).$ Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H.$

ATTENTION

Comme on le voit dans l'exercice, un sous-espace vectoriel a, en général, plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'un supplémentaire et non du supplémentaire.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Méthode I :

Soient F et G deux sevs de E . Comment montrer que $E = F \oplus G$?

Il s'agit, pour un vecteur quelconque x de E , de trouver $x_F \in F$ et $x_G \in G$ uniques tels que $x = x_F + x_G$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Méthode I :

Soient F et G deux sevs de E . Comment montrer que $E = F \oplus G$?

Il s'agit, pour un vecteur quelconque x de E , de trouver $x_F \in F$ et $x_G \in G$ uniques tels que $x = x_F + x_G$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est adapté car on ne sait généralement pas quelle forme a la décomposition : on va le découvrir dans l'analyse.

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in E$ sans conditions particulières.



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Méthode I :

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in E$ sans conditions particulières.

Analyse : On suppose que x s'écrit sous la forme $x = x_F + x_G$, où x_F est un vecteur de F et x_G un vecteur de G .

On essaye ensuite de construire x_F et x_G uniquement à l'aide de x ou d'autres vecteurs de référence.

On doit trouver un unique couple candidat (x_F, x_G) . L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)



II. Sous-espace vectoriel

4. Sous-espaces supplémentaires

Méthode I :

Déclaration d'un vecteur à décomposer : On fixe un vecteur $x \in E$ sans conditions particulières.

Analyse : On suppose que x s'écrit sous la forme $x = x_F + x_G$, où x_F est un vecteur de F et x_G un vecteur de G .

On essaye ensuite de construire x_F et x_G uniquement à l'aide de x ou d'autres vecteurs de référence.

On doit trouver un unique couple candidat (x_F, x_G) . L'unicité de la décomposition est alors acquise. (Sinon la somme n'est pas directe.)

Synthèse : On considère le couple (x_F, x_G) exhibé dans l'analyse et on montre qu'il satisfait les qualités requises *i.e.* $x_F + x_G = x$, $x_F \in F$ et $x_G \in G$.



III. Applications linéaires

1 Structure d'espace vectoriel

2 Sous-espace vectoriel

3 Applications linéaires

- Généralités
- Le $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$
- Composition d'applications linéaires
- Polynômes d'endomorphismes

4 Noyau et image d'une application linéaire



III. Applications linéaires

Qu'est ce qu'un Kinder surprise sans jouet à l'intérieur ?



III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

$$\blacksquare \forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$$

III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ ou, simplement, $\mathcal{L}(E; F)$.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ ou, simplement, $\mathcal{L}(E; F)$.

Vocabulaire :

- Si $f : E \mapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une **forme** linéaire.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ ou, simplement, $\mathcal{L}(E; F)$.

Vocabulaire :

- Si $f : E \mapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une **forme linéaire**.
- Si $f : E \mapsto F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.

III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ ou, simplement, **$\mathcal{L}(E; F)$** .

Vocabulaire :

- Si $f : E \mapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une **forme linéaire**.
- Si $f : E \mapsto F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $f : E \mapsto E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou, simplement, **$\mathcal{L}(E)$** .

III. Applications linéaires

1. Généralités

Définition 10 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev.

On dit que $f : E \mapsto F$ est un **homomorphisme d'espaces vectoriels** ou, plus simplement, une **application linéaire** si :

- $\forall (x; y) \in E^2, \quad f(x +_E y) = f(x) +_F f(y).$
- $\forall (\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E, \quad f(\lambda \cdot_E x) = \lambda \cdot_F f(x).$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$ ou, simplement, $\mathcal{L}(E; F)$.

Vocabulaire :

- Si $f : E \mapsto \mathbb{K}$ est linéaire, on dit que f est une **forme linéaire**.
- Si $f : E \mapsto F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $f : E \mapsto E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou, simplement, $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \mapsto E$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$ ou, simplement, $\mathcal{G}l(E)$.

III. Applications linéaires

1. Généralités

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Autrement dit, une application linéaire est une application compatible avec les deux opérations définissant la structure d'espace vectoriel.

ATTENTION

L'application $\ln : (\mathbb{R}_+^* ; \times) \mapsto (\mathbb{R} ; +)$ est également appelé un morphisme mais non un homomorphisme car $(\mathbb{R}_+^* ; \times)$ n'est pas un espace vectoriel.

De même, les homéomorphismes et autres difféomorphismes rencontrés en analyse n'ont, en général, rien à voir avec des morphismes. Juste un choix de nom malheureux.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$.
$$x \longmapsto kx$$

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$.
$$x \longmapsto kx$$

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a: E \longrightarrow E$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_E$.
$$x \longmapsto x + a$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$.

$$x \longmapsto kx$$

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a: E \longrightarrow E$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_E$.

$$x \longmapsto x + a$$

- Les applications $x \mapsto x^2, \frac{1}{x}, \cos(x), \sqrt{x}, e^x, \dots$ ne sont pas linéaires!!!!



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$.
$$x \longmapsto kx$$

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a: E \longrightarrow E$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_E$.
$$x \longmapsto x + a$$

- Les applications $x \mapsto x^2, \frac{1}{x}, \cos(x), \sqrt{x}, e^x, \dots$ ne sont pas linéaires !!!!!

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
$$(x, y) \longmapsto (x + 2y, -x, 3y)$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 17 :

- $\forall k \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$.
$$x \longmapsto kx$$

C'est même un automorphisme si $k \neq 0$.

- Les translations $t_a: E \longrightarrow E$ ne sont pas linéaires si $a \neq 0_E$.
$$x \longmapsto x + a$$

- Les applications $x \mapsto x^2, \frac{1}{x}, \cos(x), \sqrt{x}, e^x, \dots$ ne sont pas linéaires!!!!

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
$$(x, y) \longmapsto (x + 2y, -x, 3y)$$

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$
$$(x, y) \longmapsto (2x - 3, 4 + y, -x + 2y)$$

dans $\mathbb{R}^3$. On pourra notamment constater que $f(2x; 2y) \neq 2f(x; y)$.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Proposition 16 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev et $f : E \mapsto F$.

$$\bullet f \in \mathcal{L}(E; F) \implies f(0_E) = 0_F.$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Proposition 16 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev et $f : E \mapsto F$.

$$\textcircled{1} \quad f \in \mathcal{L}(E; F) \implies f(0_E) = 0_F.$$

$$\textcircled{2} \quad f \in \mathcal{L}(E; F) \iff \forall (x; y) \in E^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2,$$

$$f(\lambda \cdot_E x + \mu \cdot_E y) = \lambda \cdot_F f(x) + \mu \cdot_F f(y)$$

$$\iff \forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot_E x + y) = \lambda \cdot_F f(x) + f(y).$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Proposition 16 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev et $f : E \mapsto F$.

❶ $f \in \mathcal{L}(E; F) \implies f(0_E) = 0_F.$

❷ $f \in \mathcal{L}(E; F) \iff \forall (x; y) \in E^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2,$

$$f(\lambda \cdot_E x + \mu \cdot_E y) = \lambda \cdot_F f(x) + \mu \cdot_F f(y)$$

$$\iff \forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot_E x + y) = \lambda \cdot_F f(x) + f(y).$$

❸ La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :

$$\forall A \text{ sev de } E \text{ et } f \in \mathcal{L}(E; F), \quad f|_A \in \mathcal{L}(A; F).$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Proposition 16 :

Soient $(E; +_E; \cdot_E)$ et $(F; +_F; \cdot_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev et $f : E \mapsto F$.

❶ $f \in \mathcal{L}(E; F) \implies f(0_E) = 0_F.$

❷ $f \in \mathcal{L}(E; F) \iff \forall (x; y) \in E^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2,$

$$f(\lambda \cdot_E x + \mu \cdot_E y) = \lambda \cdot_F f(x) + \mu \cdot_F f(y)$$

$$\iff \forall (x; y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot_E x + y) = \lambda \cdot_F f(x) + f(y).$$

❸ La restriction d'une application linéaire à un sev reste linéaire :

$$\forall A \text{ sev de } E \text{ et } f \in \mathcal{L}(E; F), \quad f|_A \in \mathcal{L}(A; F).$$

ATTENTION

Si f est linéaire alors $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse.

En particulier il ne sert à rien de montrer que $f(0) = 0$ pour justifier qu'une application est linéaire. C'est une condition nécessaire non suffisante.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Pour toute application linéaire f :

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f(e_i)$$

et

$$f(0_E) = 0_F.$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Pour toute application linéaire f :

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f(e_i)$$

et

$$f(0_E) = 0_F.$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

- ❶ de vérifier que $f(0_E) \neq 0_F$,



III. Applications linéaires

1. Généralités

Pour toute application linéaire f :

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f(e_i)$$

et

$$f(0_E) = 0_F.$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

- ❶ de vérifier que $f(0_E) \neq 0_F$,
- ❷ d'exhiber un couple particulier de vecteurs (x, y) et un couple particulier de scalaires (λ, μ) pour lesquels $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Pour toute application linéaire f :

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f(e_i)$$

et

$$f(0_E) = 0_F.$$

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, il suffit par exemple, au choix,

- ❶ de vérifier que $f(0_E) \neq 0_F$,
- ❷ d'exhiber un couple particulier de vecteurs (x, y) et un couple particulier de scalaires (λ, μ) pour lesquels $f(\lambda x + \mu y) \neq \lambda f(x) + \mu f(y)$.
- ❸ de montrer que $f(-x) \neq -f(x)$ pour un vecteur $x \in E$ particulier.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 18 :

Les applications ci-dessous ne sont pas linéaires :

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{et} \quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y) & \longmapsto & xy & (x; y) \longmapsto x^2 + y^2. \end{array}$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme de E , appelé

$$x \longmapsto \lambda \cdot x$$

homothétie de E de rapport λ . En particulier, Id_E est linéaire.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme de E , appelé

$$x \longmapsto \lambda \cdot x$$

homothétie de E de rapport λ . En particulier, Id_E est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $D : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme.

$$P \longmapsto P'$$


III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme de E , appelé

$$x \longmapsto \lambda \cdot x$$

homothétie de E de rapport λ . En particulier, Id_E est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $D : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme.

$$P \longmapsto P'$$

La dérivation sur $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$: $\delta : \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est linéaire.

$$f \longmapsto f'$$

Ce n'est pas un endomorphisme.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'homothétie : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $h_\lambda : E \rightarrow E$ est un endomorphisme de E , appelé
$$x \mapsto \lambda \cdot x$$

homothétie de E de rapport λ . En particulier, Id_E est linéaire.

La dérivation sur $\mathbb{K}[X]$: $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ est un endomorphisme.
$$P \mapsto P'$$

La dérivation sur $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$: $\delta : \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est linéaire.
$$f \mapsto f'$$

Ce n'est pas un endomorphisme.

La dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$: $\delta : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ est un endomorphisme.
$$f \mapsto f'$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a; b]$: $\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a; b]$: $\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in A$,

$e_a : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto f(a)$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$e_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$$

$$P \mapsto P(a).$$

III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'intégrale sur $[a; b]$: $\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

L'évaluation en a : si A est un ensemble non vide, alors pour tout $a \in A$,

$e_a : \mathcal{F}(A, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$f \mapsto f(a)$$

Idem pour l'évaluation des polynômes en un $a \in \mathbb{K}$ donné

$$e_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$$

$$P \mapsto P(a).$$

La transposition matricielle : $\tau : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est linéaire.

$$M \mapsto M^T$$

III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$M \longmapsto \text{tr}(M)$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$M \mapsto \text{tr}(M)$$

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$ -linéaires mais pas $\mathbb{C}$ -linéaires.

$$\begin{array}{llll} \Re: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & , \Im: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & \text{et } c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \text{Re}(z) & z \mapsto \text{Im}(z) & z \mapsto \bar{z}. \end{array}$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

La trace : $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$M \longmapsto \text{tr}(M)$$

Partie réelle, imaginaire, conjugaison : sont $\mathbb{R}$ -linéaires mais pas $\mathbb{C}$ -linéaires.

$$\begin{array}{llll} \Re: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} & , \Im: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et } c: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \text{Re}(z) & z \longmapsto \text{Im}(z) & z \longmapsto \bar{z}. \end{array}$$

L'application limite :

$$\begin{array}{ll} \Lambda: \left\{ \begin{array}{l} \text{suites convergentes} \\ \text{de } \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \end{array} \right\} & \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{est une forme linéaire.} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{array}$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'application canonique associée à une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{est linéaire.} \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exemples 19 (Exemples de référence) :

L'application canonique associée à une matrice : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{est linéaire.} \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

La projection : Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -ev.

$$\begin{aligned} p_i : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n &\longrightarrow E_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

est une application linéaire de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans E_i appelée **projection** sur E_i (parallèlement aux $E_j, j \neq i$).



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exercice 8 :

- ❶ Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.



III. Applications linéaires

1. Généralités

Exercice 8 :

- ❶ Donner l'application canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ❷ À quelle matrice est associée $\varphi : (x, y) \mapsto (x + 2y, 3x + 4y, 5x + 6y)$?



III. Applications linéaires

2. Le $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$

Proposition 17 :

$(\mathcal{L}(E; F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev, sev de $(\mathcal{F}(E; F), +, \cdot)$.



III. Applications linéaires

2. Le $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; F)$

Proposition 17 :

$(\mathcal{L}(E; F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev, sev de $(\mathcal{F}(E; F), +, \cdot)$.

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si, pour tout x de E , la famille $(x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.



III. Applications linéaires

3. Composition d'applications linéaires

Proposition 18 :

- 1 La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$.



III. Applications linéaires

3. Composition d'applications linéaires

Proposition 18 :

- ❶ La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$.
- ❷ La composée est elle-même bilinéaire :
En effet, si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ alors :
 - $h \mapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathcal{L}(E; F)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$ (linéarité à droite).
 - $h \mapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathcal{L}(F; G)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$ (linéarité à gauche).



III. Applications linéaires

3. Composition d'applications linéaires

Proposition 18 :

- ① La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$.
- ② La composée est elle-même bilinéaire :
En effet, si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ alors :
 - $h \mapsto g \circ h$ est linéaire de $\mathcal{L}(E; F)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$ (linéarité à droite).
 - $h \mapsto h \circ f$ est linéaire de $\mathcal{L}(F; G)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$ (linéarité à gauche).

Remarque : $h \mapsto g \circ h \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; F); \mathcal{L}(E; G))$.



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :

$$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g.$$

On dit alors que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, non intègre et non commutative.

Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :

$$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g.$$

On dit alors que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, non intègre et non commutative.

Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut aussi définir le **polynôme d'endomorphisme** $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f^1 + a_2f^2 + \dots + a_nf^n \quad \text{où } f^0 = \text{Id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots$$



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :

$$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g.$$

On dit alors que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, non intègre et non commutative.

Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut aussi définir le **polynôme d'endomorphisme** $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f^1 + a_2f^2 + \dots + a_nf^n \quad \text{où } f^0 = \text{Id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots$$

Exemples 20 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $P = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $P(f) = \lambda \text{Id}_E$.

III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Dans $\mathcal{L}(E)$, la composition $\circ$ est associative, distributive par rapport à $+$, admet pour élément neutre Id_E et satisfait à la loi externe :

$$\lambda.(f \circ g) = f \circ (\lambda.g) = (\lambda.f) \circ g.$$

On dit alors que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, non intègre et non commutative.

Résultat à rapprocher de celui obtenu pour l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De la même manière, pour tout $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut aussi définir le **polynôme d'endomorphisme** $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f^1 + a_2f^2 + \dots + a_nf^n \quad \text{où } f^0 = \text{Id}_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots$$

Exemples 20 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $P = \lambda \in \mathbb{K}$ alors $P(f) = \lambda \text{Id}_E$.
- Si $P = X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$ alors

$$P(f) = f^2 + f - 6\text{Id}_E = (f - 2\text{Id}_E) \circ (f + 3\text{Id}_E).$$

III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Exemples 21 :

■ Si $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $u^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Exemples 21 :

■ Si $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $u^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

■ Si $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $u^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $u^2 = 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Proposition 19 :

Soient $(f; g) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux endomorphismes qui **commutent** *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Proposition 19 :

Soient $(f; g) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux endomorphismes qui **commutent** i.e. $f \circ g = g \circ f$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

ATTENTION

Les écritures $f^k g^{n-k}$ et $(f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$ sont respectivement à comprendre $f^k \circ g^{n-k}$ et $(f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$.



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Remarque : Les homothéties λId_E commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Remarque : Les homothéties λId_E commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(f + \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{(n-1)}).$$



III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Remarque : Les homothéties λId_E commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(f + \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{(n-1)}).$$

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- ❶ Montrer que u est un automorphisme de E .

III. Applications linéaires

4. Polynômes d'endomorphismes

Remarque : Les homothéties λId_E commutent avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemples 22 :

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(f + \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \quad \text{et} \quad (f - \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f^k.$$

$$f^n - \text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) \circ (\text{Id}_E + f + f^2 + \dots + f^{(n-1)}).$$

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

- ❶ Montrer que u est un automorphisme de E .
- ❷ Montrer que $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u - 2\text{Id}_E)$.

IV. Noyau et image d'une application linéaire

- 1 Structure d'espace vectoriel
- 2 Sous-espace vectoriel
- 3 Applications linéaires
- 4 Noyau et image d'une application linéaire**
 - Images directe et réciproque d'un sev
 - Noyau et image d'une application linéaire
 - Injectivité et surjectivité des applications linéaires



IV. Noyau et image d'une application linéaire

1. Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 20 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ➊ Pour tout sev E_1 de E , l'ensemble $f(E_1)$ est un sev de F .



IV. Noyau et image d'une application linéaire

1. Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 20 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ❶ Pour tout sev E_1 de E , l'ensemble $f(E_1)$ est un sev de F .
- ❷ Pour tout sev F_1 de F , l'ensemble $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E .



IV. Noyau et image d'une application linéaire

1. Images directe et réciproque d'un sev

Proposition 20 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ❶ Pour tout sev E_1 de E , l'ensemble $f(E_1)$ est un sev de F .
- ❷ Pour tout sev F_1 de F , l'ensemble $f^{-1}(F_1)$ est un sev de E .

ATTENTION

La notation f^{-1} est à prendre comme l'image réciproque par f ici.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

La **proposition (20)** nous encourage à nous intéresser à deux cas bien particuliers :

Définition II :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ① On appelle **noyau** de f , et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F .

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\} \subset E.$$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

La **proposition (20)** nous encourage à nous intéresser à deux cas particuliers :

Définition II :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ① On appelle **noyau** de f , et on note $\ker(f)$ l'ensemble des vecteurs de E s'envoyant sur le vecteur nul de F .

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, \quad f(x) = 0_F\} \subset E.$$

- ② On appelle **image** de f , et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E .

$$\text{Im } f = f(E) = \{y \in F, \quad \exists x \in E, y = f(x)\} \subset F.$$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

À retenir :

$$\blacksquare \operatorname{Im}(u) = \{0_F\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \iff \ker(u) = E.$$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

À retenir :

■ $\text{Im}(u) = \{0_F\} \iff u = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \iff \ker(u) = E.$

■ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \iff \text{Im}(u) \subset \ker(v).$$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\text{Im}(u) = \text{vect}((1, 2))$ est représenté par la droite
$$x \longmapsto (x, 2x)$$

d'équation $y = 2x$ dans le plan.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\text{Im}(u) = \text{vect}((1, 2))$ est représenté par la droite
$$x \mapsto (x, 2x)$$

d'équation $y = 2x$ dans le plan.
- L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $v : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$ est le plan d'équation $z = x$.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 23 (Images) :

- Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\text{Im}(u) = \text{vect}((1, 2))$ est représenté par la droite
$$x \longmapsto (x, 2x)$$

d'équation $y = 2x$ dans le plan.
- L'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $v : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$ est le plan d'équation $z = x$.

ATTENTION

$v(1; -1; 1) = (0; 0; 0)$ i.e. $(1; -1; 1) \in \ker v$ sans qu'il soit nul.

Les éléments du noyau d'une application linéaire ne sont pas tous nuls. C'est là le point intéressant.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 24 (Noyaux) :

- Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
 $(x, y, z) \mapsto x + y + z$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 24 (Noyaux) :

■ Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
 $(x, y, z) \mapsto x + y + z$

■ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $D: \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est l'application

$$\varphi \mapsto \varphi'$$

linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I .



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemples 24 (Noyaux) :

- Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\ker(u)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
 $(x, y, z) \mapsto x + y + z$
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $D : \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est l'application
 $\varphi \mapsto \varphi'$
linéaire de dérivation, alors $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions constantes sur I .
- Si $f_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$, alors $\ker(f_a) = \{(X - a)Q / Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
 $P \mapsto P(a)$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemple 25 (Projection) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noyau : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \ker p &\iff p((x, y)) = (0, 0) \\ &\iff (x, 0) = (0, 0) \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\ker(p) = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ i.e. l'axe des ordonnées.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Exemple 25 (Projection) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noyau : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \ker p &\iff p((x, y)) = (0, 0) \\ &\iff (x, 0) = (0, 0) \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\ker(p) = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ i.e. l'axe des ordonnées.

$$\begin{aligned} \text{Image : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \text{Im } p &\iff \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, p((x_0, y_0)) = (x, y) \\ &\iff \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, (x_0, 0) = (x, y) \\ &\iff y = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Im}(p) = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ i.e. l'axe des abscisses.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 21 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ➊ $\ker f$ est un sev de E .



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 21 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

❶ $\ker f$ est un sev de E .

❷ $\operatorname{Im} f$ est un sev de F .



IV. Noyau et image d'une application linéaire

2. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 21 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

❶ $\ker f$ est un sev de E .

❷ $\operatorname{Im} f$ est un sev de F .

Exercice II :

Déterminer le noyau de $\Phi : \mathcal{D}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

$$f \longmapsto f'' + 4f.$$


IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 22 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

④ f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 22 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ❶ f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$. ❷ f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = F$.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 22 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ① f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$. ② f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = F$.

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Théorème 22 :

Soient E, F , deux $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

- ❶ f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$. ❷ f est surjective $\iff \operatorname{Im} f = F$.

Réponse : Un Kinder injectif car son noyau est réduit à zéro.

La plus grande utilité de ce théorème est donc de ramener l'étude de l'injectivité d'une application linéaire à celle de son noyau.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noyau : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \ker S &\iff p((x, y)) = (0, 0). \\ &\iff (-x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Donc, $\ker(S) = \{(0, 0)\}$ et S est injective.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noyau : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \ker S &\iff p((x, y)) = (0, 0). \\ &\iff (-x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Donc, $\ker(S) = \{(0, 0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = S((-x, y))$ i.e. $\text{Im}(S) = \mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemple 26 (Symétrie) :

Soit l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noyau : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \ker S &\iff p((x, y)) = (0, 0). \\ &\iff (-x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Donc, $\ker(S) = \{(0, 0)\}$ et S est injective.

Image : De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = S((-x, y))$ i.e. $\text{Im}(S) = \mathbb{R}^2$.
L'application S est donc surjective.

Conclusion : $S \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemples 2.1 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemples 21 :

- Toute homothétie non nulle est surjective.
- $D : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas surjective.
 $P \mapsto P'$



IV. Noyau et image d'une application linéaire

3. Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Exemples 21 :

■ Toute homothétie non nulle est surjective.

■ $D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ n'est pas surjective.

$$P \longmapsto P'$$

■ $T : \mathcal{C}^0([-1; 1]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective.

$$f \longmapsto \int_{-1}^1 f(t) dt$$

