# Espaces vectoriels

## I/ Espaces vectoriels

**Exercice 1 :** Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a, b) + (c, d) = (c, d); \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2 :** Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On définit sur E :

— la loi $\oplus$ par $(x, y) \oplus (x', y') = (xx', y + y')$

— une loi externe $\cdot$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ par $\lambda(x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$.

Vérifier que $(\mathrm{E}, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ev.

**Exercice 3 :** $\mathbb{R}^2$, muni de la loi $+$ usuelle et de la loi externe définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$ est-il un $\mathbb{R}$ev ?

**Exercice 4 :** On note :

— $\mathrm{F} = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$.

— $\mathrm{G} = \{(a - b\,; a + b\,; a - 3b) \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Espaces vectoriels

**Exercice 5 :** Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels pour les lois usuelles.

1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$.
2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\}$.
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$.
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.
6. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$.
7. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.
8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geqslant 0\}$
9. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 \sin(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
10. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
11. L'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
12. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (\mathrm{A}, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{A}\cos(x - \varphi)\}$.
13. L'ensemble des fonctions réelles sur $[0, 1]$, continues, positives ou nulles.
14. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
15. L'ensemble des solutions $(x_1, x_2, x_3)$ du système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 0. \end{array}\right.$$
16. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1/2) = 0$.
17. L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
18. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
19. L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.
20. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
21. L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4.
22. L'ensemble des polynômes de degré exactement $n$.
23. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
24. L'ensemble des primitives de la fonction $xe^x$ sur $\mathbb{R}$.
25. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
26. L'ensemble des points $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
27. L'ensemble des vecteurs $(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
28. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}$.
29. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$
30. L'ensemble des fonctions monotones
31. L'ensemble des fonctions $f$ telles que : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
32. L'ensemble des fonctions nulles sur [0,1]
33. L'ensemble des fonctions périodiques de période T (T fixé).
34. L'ensemble des fonctions ayant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.

## II/ Somme directe

**Exercice 6 :** Soient C l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathrm{C}_0$ l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0, et D l'ensemble des suites réelles constantes.

1. Montrer que C, $\mathrm{C}_0$ et D sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0 \oplus \mathrm{D}$.

**Exercice 7 :** On note :

— $\mathrm{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y = 0\}$.

— $\mathrm{G} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2z + 3t = 0\}$.

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 8 :** Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.

On note :

— $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

— $\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \in \mathrm{E} \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

**Exercice 9 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ deux sev de E, et H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

**Exercice 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. On pose $e = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{C}^n$, et $\mathrm{F} = \mathbb{C}e$.

On définit $\mathrm{G} = \left\{ (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,/\, \sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \right\}$.

Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$.

**Correction :** Montrons que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$, i.e.

— F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ ;
— G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ ;
— $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ ;
— $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$.

Pour $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{C}^n$

— F et G sont clairement des sev des $\mathbb{C}^n$.
— $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathbb{C}^n$ : immédiat
— $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ : tout $x$ de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ s'écrit $(\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)$ avec $n\lambda = 0 \iff \lambda = 0$. Donc $x = 0$.
— $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ : Soit $u = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{C}^n$.

ANALYSE Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{G}$ tels que $u = x + y$.

On a :

— $x \in \mathrm{F}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda e = (\lambda, \lambda, \cdots, \lambda)$.
— $y \in \mathrm{G}$ donc $y = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ avec $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$

$$u = x + y \text{ donc } \begin{cases} \lambda + z_1 = a_1 \\ \lambda + z_2 = a_2 \\ \vdots \\ \lambda + z_n = a_n \end{cases}. \text{ D'où } \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\ \forall\, k \in [\![1, n]\!], z_k = a_k - \lambda \end{cases}.$$

On a $x = \lambda e$ avec $\lambda = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $y = (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda)$.

Soit $u = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{C}^n$.

SYNTHÈSE On pose : $\begin{cases} x = \lambda e \text{ avec } \lambda = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\ y = (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda) \end{cases}$

On a bien :

— $x \in \mathrm{F}$.
— $y \in \mathrm{G}$.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - \lambda) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n\lambda = 0.$

— $u = x + y$ : En effet, $x + y = (\lambda, \lambda, \cdots, \lambda) + (a_1 - \lambda, a_2 - \lambda, \cdots, a_n - \lambda)$
$= (a_1, a_2, \cdots a_n) = u.$

Conclusion : $u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$ donc $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ puis $\mathbb{C}^n \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

**Exercice 11 :** Soit $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \,/\, \mathrm{X}(\mathrm{X}+1)^2 | \mathrm{P}\}$.

1. Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$.

   Aide : On écrira G sous la forme vect $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ avec $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_3$ trois polynômes de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$ à déterminer.

2. Montrer que $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}] = \mathrm{G} \oplus \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

**Exercice 12 :** On note :

— $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R}) \,/\, f(0) = f'(0) = 0\}$.
— $\mathrm{G} = \{x \longmapsto ax + b \,/\, (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$.

**Exercice 13 :** Soit $\mathrm{E} = \mathrm{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note :

— $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, f'' - 2f' + 5f = 0\}$.
— $\mathrm{H} = \{f \in \mathrm{E}, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Vérifier que G et H sont des sev de E.
2. Sans calcul, justifier que G et H sont en somme directe (dans E).
3. Prouver que G et H sont des sev supplémentaires de E.

**Exercice 14 :** Dans $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère :

— F le sous-ensemble de E composé des matrices de trace nulle.
— $\mathrm{G} = \{\lambda \mathrm{I}_n \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ celui des matrices scalaires.

Montrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, et que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

**Exercice 15 :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. Justifier que $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,/\, \mathrm{P}(\alpha) = 0\}$ est un sev. de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

## III/ Applications linéaires

**Exercice 16 :** En admettant que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{XP} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-z, y+z) \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, -2x+2y) \end{array}$
4. $j : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M} - \mathrm{M}^\top \end{array}$
5. $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

**Exercice 17 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f$ et $g$ commutent ($f \circ g = g \circ f$).

Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par $g$.

**Exercice 18 :** Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f$ et $g$ commutent ($f \circ g = g \circ f$). Démontrer que $\ker\ f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par $g$.

**Exercice 19 :** Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Montrer que pour tout entier $k$, on a $\ker\ u^k \subset \ker\ u^{k+1}$ et $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$.

**Exercice 20 (Image, noyau) :** Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

1. Montrer que :
   (a) $\ker(v \circ u) = u^{-1}(\ker v)$.
   (b) $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.
   (c) $\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im} u)$.
   (d) $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.
2. En déduire que si $u$ est un endomorphisme de E, alors
$$\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Im} u.$$
3. Prouver que $\ker(u) = \ker\left(u^2\right) \iff \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0_\mathrm{E}\}$.

**Exercice 21 :** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = f(\ker(f^2))$.

**Correction :** Pour montrer l'égalité $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = f(\ker f^2)$, nous montrons la double inclusion.

Soit $y \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$, alors $f(y) = 0$ et il existe $x$ tel que $y = f(x)$.

De plus $f^2(x) = f(f(x)) = f(y) = 0$ donc $x \in \ker f^2$.

Comme $y = f(x)$ alors $y \in f(\ker f^2)$. Donc $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f \subset f(\ker f^2)$.

Pour l'autre inclusion, nous avons déjà que $f(\ker f^2) \subset f(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}\, f$. De plus $f(\ker f^2) \subset \ker f$, car si $y \in f(\ker f^2)$ il existe $x \in \ker f^2$ tel que $y = f(x)$, et $f^2(x) = 0$ implique $f(y) = 0$ donc $y \in \ker f$.

Par conséquent $f(\ker f^2) \subset \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$.

**Exercice 22 :** Préciser si $\mathscr{L}$ est injective.

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;2x-y) \end{array}$
2. $\mathscr{L} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y+z) \end{array}$
3. $\mathscr{L} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x+y-z, x-y+z, -x+y+z) \end{array}$
4. $\mathscr{L} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+2y+3z+4t, -x-y+z) \end{array}$

**Exercice 23 :** Déterminer les noyaux, images, et déduire éventuellement l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

1. $\mathrm{D} : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$
2. $\mathrm{P} : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^1(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ , $a \in \mathrm{I}$.

**Exercice 24 :** Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque

$$v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+4z, x+y-z, 2y+z). \end{array}$$

**Exercice 25 :** Soit E les $\mathbb{R}$ev des applications $f$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathrm{D} : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$

1. Vérifier que $\mathrm{D} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer $\ker(\mathrm{D})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{D})$.
3. A-t-on $\mathrm{E} = \ker(\mathrm{D}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{D})$ ?

**Exercice 26 :**

1. Montrer que pour tous polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q}$, tout endomorphisme $u$ et tout scalaire $\lambda$ :
   (a) $(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})(u) = \lambda\mathrm{P}(u) + \mathrm{Q}(u)$
   (b) $(\mathrm{P} \cdot \mathrm{Q})(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u)$
   (c) Deux polynômes en le même endomorphisme $u$ commutent.
2. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

   On dit que P est annulateur de $u$ si $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul :

$$\mathrm{P}(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

   Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, et que si $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est annulateur de $u$, alors tout multiple de P l'est également.