Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Donner une caractérisation d'une racine d'un polynôme.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(1+x)^2}$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$.

Exercice 3 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ divise $\mathrm{X}^{3m+2} + \mathrm{X}^{3n+1} + \mathrm{X}^{3p}$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Prouver que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Exercice 2 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$.

Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Exercice 3 : Résoudre $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = -2 \\ xyz = -1 \end{cases}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : En admettant le théorème précédent, prouver que si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_k)$.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 2 : Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Préciser les positions relatives par rapport à ces asymptotes.

Exercice 3 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^6 + 3\mathrm{X}^4 + 3\mathrm{X}^2 + 1$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer et prouver le lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Donner un contre-exemple au-delà (fonction qui n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0 et admettant un $\mathrm{DL}_2(0)$ par exemple).

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

Exercice 3 : Factoriser $\mathrm{X}^{2n} - 2\mathrm{X}^n \cos n\theta + 1$.

Nom : ....

Prénom : ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer le lemme (admis ici) sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_4(0)$ de : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Exercice 2 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Exercice 3 : On considère le polynôme $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + X^2 + X$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer et prouver le théorème de Taylor-Young.

Exercice 1 : Déterminer le $DL_3(0)$ de : $\sqrt{1+\sin(x)}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ sinon. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, le développement limité de f en 0.

Quelles conclusions en tirer ?

Exercice 3 : On considère $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P(X^3) + XQ(X^3)$. Montrer que $P(1) = Q(1) = 0$.

Réciproque ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer et prouver le théorème de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)}$.

Exercice 2 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto (x-3)^3 \ln \cos \frac{1}{x}$.

Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et P le polynôme défini par la relation $(\mathrm{X}+1)^{2n} - 1 = \mathrm{XP}$.

1. Déterminer l'expression développée de P.
2. Déterminer l'expression factorisée de P.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ puis de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.