Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ divise P. (on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1+x)^x$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$.

Exercice 3 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 + 4\mathrm{X}^3 + 5\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 2$. Calculer $\mathrm{P}(2+\sqrt{3})$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels *i.e.* connaître la forme factorisée d'un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{ch}\,(x)}{1 + \mathrm{sh}\,(x)} \right)^x$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Contre-exemple à citer au-delà.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 2 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x(x+1)}.$$

Exercice 3 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^6 + 3\mathrm{X}^4 + 3\mathrm{X}^2 + 1$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de Taylor-Young.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

Exercice 3 : Factoriser $\mathrm{X}^{2n} - 2\mathrm{X}^n \cos n\theta + 1$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer le lemme (admis ici) sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

Exercice 2 : Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Préciser les positions relatives par rapport à ces asymptotes.

Exercice 3 : On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Contre-exemple à citer au-delà.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

Exercice 2 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Exercice 3 : On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{X} + n$.

Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $\mathrm{P}(\alpha) = \mathrm{P}'(\alpha) = \mathrm{P}''(\alpha) = \cdots = \mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $(\cos(x))^p$.

Exercice 2 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}} \end{array}$.

f est-elle prolongeable par continuité ?

Exercice 3 : a, b, c sont les racines dans $\mathbb{C}$ de $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} - 1$.

Calculer $a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)}$.

Exercice 2 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto (x-3)^3 \ln \cos \dfrac{1}{x}$.

Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et P le polynôme défini par la relation $(\mathrm{X}+1)^{2n} - 1 = \mathrm{XP}$.

1. Déterminer l'expression développée de P.
2. Déterminer l'expression factorisée de P.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ puis de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 0.

Exercice 1 : Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$.

Exercice 2 :

1. Calculer $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$.
2. Donner un équivalent de $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 3 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-2 \\ xyz=-1 \end{cases}$.