Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\alpha_i)$ divise P. (on admettra l'initialisation)

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $(1+x)^x$.

Correction : $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{5}{6}x^4 - \dfrac{3}{4}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$.

Correction :

1. On pose $x = \dfrac{1}{2} + h$.

$$(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = -\frac{2h^2 - h}{\tan \pi h} \sim -\frac{-h}{\pi h} \sim \frac{1}{\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x = \frac{1}{\pi}}$$

2. On pose $x = 2 + h$.

$$\begin{aligned}(2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} &= e^{\tan\frac{\pi x}{4}\ln(2^x+3^x-12)} = e^{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{4}\right)\ln(4\times 2^h+9\times 3^h-12)} \\ &= e^{\dfrac{\ln\left(1+4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}}}.\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1+4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)\right)}{-\tan\frac{\pi h}{4}} &\sim \frac{4\times(2^h-1)+9\times(3^h-1)}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\times(e^{h\ln 2}-1)+9\times(e^{h\ln 3}-1)}{-\frac{\pi h}{4}} \\ &\sim \frac{4h\ln 2+9h\ln 3}{-\frac{\pi h}{4}} \sim \frac{4\ln 2+9\ln 3}{-\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan\frac{\pi x}{4}} = (2^4\times 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}}$.

Exercice 3 :

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$. Calculer $P(2+\sqrt{3})$.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de décomposition en produit de facteurs irréductibles réels *i.e.* connaître la forme factorisée d'un polynôme sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.

Correction : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)}\right)^x$.

Correction : $\left(\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)}\right)^x = e^{x\ln\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)}} = e^{x\ln\left(1+\frac{\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)-1}{1+\operatorname{sh}(x)}\right)} = e^{x\ln\left(1+\frac{2e^{-x}-1}{1+\operatorname{sh} x}\right)}$.

$x\ln\left(1+\dfrac{2e^{-x}-1}{1+\operatorname{sh}(x)}\right) \sim x\dfrac{2e^{-x}-1}{1+\operatorname{sh}(x)} \sim \dfrac{-x}{\operatorname{sh}(x)} \to 0.$

$\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)}\right)^x = 1}$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 1$.

Trouver le reste dans la division euclidienne de P par Q.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Contre-exemple à citer au-delà.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 2 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x(x+1)}.$$

Correction : $y = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x}$.

Exercice 3 : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $\mathrm{X}^6 + 3\mathrm{X}^4 + 3\mathrm{X}^2 + 1$.

Correction : $\mathrm{X}^6 + 3\mathrm{X}^4 + 3\mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X}^2+1)^3$.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de Taylor-Young.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

Correction : $\ln \dfrac{\arctan(x)}{x} = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{13}{90}x^4 - \dfrac{251}{2835}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.

Correction : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 3 : Factoriser $\mathrm{X}^{2n} - 2\mathrm{X}^n \cos n\theta + 1$.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Énoncer le lemme (admis ici) sur l'intégration d'un petit o et démontrer le théorème de primitivation des DL.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_7(0)$ de : $\tan^2(x)$.

Correction : $\tan^2(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{17}{45}x^6 + \mathrm{o}(x^7)$.

Exercice 2 : Déterminer les asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

Préciser les positions relatives par rapport à ces asymptotes.

Correction : $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = x + 1 + \dfrac{3}{2x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Delta : y = x+1$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ.

$\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -x - 1 - \dfrac{3}{2x} + \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Delta' : y = -x-1$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ'.

Exercice 3 : On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Correction : $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-j^2)$

$\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)$

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités. Contre-exemple à citer au-delà.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de : $\dfrac{x}{\sin x}$.

Correction : $\dfrac{x}{\sin x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{7}{360}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$.

Exercice 2 : Rechercher si la courbe suivante admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position s'il y a lieu :

$$y = \sqrt{x^2 - x}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Correction : $y = x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{8x}$.

Exercice 3 : On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{n+1} - (n+1)\mathrm{X} + n$.

Quelle est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P ?

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $\mathrm{P}(\alpha)=\mathrm{P}'(\alpha)=\mathrm{P}''(\alpha)=\cdots=\mathrm{P}^{(m-1)}(\alpha)=0$ et $\mathrm{P}^{(m)}(\alpha)\neq 0$.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de : $(\cos(x))^p$.

Correction : $(\cos(x))^p = 1-\dfrac{p}{2}x^2+\dfrac{p(3p-2)}{24}x^4-\dfrac{p[15(p-1)^2+1]}{720}x^6+\mathrm{o}(x^6)$.

Exercice 2 : Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (e^x+2x)^{\frac{1}{x}}\end{array}$.

f est-elle prolongeable par continuité ?

Correction : $f(x)=(e^x+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(e^x+2x)}{x}}$.

$\dfrac{\ln(e^x+2x)}{x}=\dfrac{x+\ln(1+2xe^{-x})}{x}=1+\dfrac{\ln(1+2xe^{-x})}{x}$.

Or $\dfrac{\ln(1+2xe^{-x})}{x}\sim\dfrac{2xe^{-x}}{x}\sim 2e^{-x}\to 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e^3$.

f est prolongeable par continuité en 0, et on pose $\hat{f}(0)=e^3$.

Exercice 3 : a,b,c sont les racines dans $\mathbb{C}$ de $\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2+4\mathrm{X}-1$.

Calculer $a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$.

Correction : On a $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$, et $\sigma_3 = 1$.

$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc) = [a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b] + (a^2bc + ab^2c + abc^2)$.

Donc $[a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b] = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 = -29$.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Théorème de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1 : Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)}$.

Correction : $e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)} = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 2 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x \mapsto (x-3)^3 \ln\cos\dfrac{1}{x}$.

Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

Correction : $(x-3)^3 \ln\cos\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} - \dfrac{163}{12x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$\Delta : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$ est asymptote à la $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $\pm\infty$. $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de Δ au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et P le polynôme défini par la relation $(\mathrm{X}+1)^{2n} - 1 = \mathrm{XP}$.

1. Déterminer l'expression développée de P.
2. Déterminer l'expression factorisée de P.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$ puis de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.

Polynômes et analyse asymptotique

Question de cours : Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 0.

Exercice 1 : Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de $x \longmapsto \int_0^x \cos(t^2)dt$.

Exercice 2 :

1. Calculer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$.
2. Donner un équivalent de $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - \ell$ lorsque $x \to +\infty$.

Correction :

$$\ln(x+1) = \ln\left(x \times \left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)\\ &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)\\ &= 1+\frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

et que lorsque $x \to +\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Exercice 3 : Résoudre $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-2 \\ xyz=-1 \end{cases}$.

Correction : x, y, z sont les racines de $\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-1)$.

$\{x,y,z\} = \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.