Dénombrements et espaces vectoriels

1. **Analyse asymptotique**

   Même si les Développements limités sont supposés connus à vie, revoir les DL usuels. On demandera à chaque étudiant un calcul raisonnable sur les DL.

2. **Dénombrement**
   - Un ensemble est fini s'il est en bijection avec $[\![1;n]\!]$, son cardinal est alors n. Deux ensembles ont le même cardinal si et seulement s'ils sont en bijection.
   - Un sous-ensemble d'un ensemble est un ensemble fini et de cardinal plus petit (admis). Cas d'égalité des cardinaux.
   - Caractérisation des bijections sur et dans des ensembles finis.
   - Ensembles disjoints, cardinal de l'union disjointe. Notation $\sqcup$.
   - Cardinal du complémentaire, de l'union quelconque, de l'ensemble produit de deux ensembles finis.
   - p-uplet, ensemble des p-uplets, cardinal de E^p.
   - Application de E dans F, cardinal de $\mathrm{F}^{\mathrm{E}} = \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
   - Arrangement, nombre d'arrangements de p éléments parmi n, notation A_n^p et calcul. Nombre d'injections.
   - Permutation, définition et calcul.
   - Combinaison : une combinaison est une partie de p éléments dans un ensemble à n éléments. Nombre de combinaisons, notation et calcul avec des factoriels.
   - Rappels des formules sur les combinaisons, formule de Pascal et de Newton.
   - Parties de E, $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. Cardinal de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

3. **Espaces Vectoriels**
   - Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   - Définition d'une combinaison linéaire, d'un sev.
   - Caractérisation des sous-espaces vectoriels comme des sous-ensembles contenant 0_{E} et stables par combinaisons linéaires.
   - Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. C'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion. Opérations élémentaires sur la famille engendrant l'espace.
   - Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
   - Espaces en somme directe, espaces supplémentaires. Définition et caractérisation.

Questions de cours possibles [1] :

On demandera à chaque étudiant de réciter un DL usuel : e^x, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$ à un ordre raisonnable (4/5) en prélude.

1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application. Montrer que si f est injective, alors :

$$\mathbb{F} \text{ est fini } \Longrightarrow \mathbb{E} \text{ est fini et } \mathrm{card}\,(\mathbb{E}) \leqslant \mathrm{card}\,(\mathbb{F}).$$

2. ($\star$) Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application. Montrer que si f est surjective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini} \implies \mathbb{F} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E}).$$

3. Le nombre de p-arrangements d'un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$, si $p \leqslant n$ et 0 sinon.
4. Le nombre de parties d'un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments de cardinal p est $\dbinom{n}{p}$.
5. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n par deux méthodes.
6. Symétrie, formule du capitaine et de Pascal par des raisonnements combinatoires.
7. Connaître les exemples usuels d'espaces vectoriels, savoir écrire leurs lois et connaître leur vecteur nul.
8. L'intersection de sev est un sev et $\operatorname{vect}(\mathrm{X})$ est le plus petit sev contenant X.
9. ($\star$) $\operatorname{vect}(\mathrm{X})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examinateur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.