Polynômes et analyse asymptotique

19 septembre 2025

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **4** exercices indépendants.

Exercice 1 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme défini par

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}.$$

1. Préciser $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ et P_3.

2. Déterminer les deux racines complexes de P_2. En déduire la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

3. Le polynôme P_2 est-il scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$? Irréductible dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$? Scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$? Irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

4. Calculer P_3'.

5. Montrer que P_3 n'admet pas de racines multiples *i.e.* de multiplicité supérieure ou égale à 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Exprimer P_n' en fonction de P_{n-1}.

7. Donner une relation entre P_n et P_n'.

8. En déduire que P_n n'admet que des racines simples.

Exercice 2 – *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Combien y a-t-il de multiples de 3 dans l'ensemble $\{0, \dots, 1\,000\}$?

2. On considère l'alphabet latin constitué de ses vingt-six lettres.
   (a) Combien de mots (ayant un sens ou non) de cinq lettres toutes différentes peut-on former au total avec trois consonnes et deux voyelles quelconques ?

   (b) Même question si l'on interdit aux trois consonnes d'être consécutives dans le mot.

3. Calculer le nombre de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même telles que :
   (a) si n est pair, alors $f(n)$ est pair ;

   (b) si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3 ;

   (c) les deux propriétés précédentes sont vérifiées simultanément.

Exercice 3 – Lorsque cela a un sens, on pose $f : x \longmapsto x - \ln(x)$.

Partie I : Étude de f

1. Donner le domaine de dérivabilité ainsi que le tableau de variations complet de f.

2. Vérifier que $[1\,;2]$ est stable par f.

3. Montrer que f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1\,;2]$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in \,]0\,;1[$ et un unique réel $y_n \in \,]1\,;+\infty[$ tels que $f(x_n) = f(y_n) = n$.

Partie II : La première suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement monotone puis convergente vers un réel positif ℓ.

6. Déterminer ℓ.

7. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$.

8. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$.

9. Montrer que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-2n}\right).$$

Partie III : Une suite récurrente

On fixe $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1\,;2]$.

11. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser ses variations.

12. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$.
14. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = u_0 - u_{n+1}$.
16. En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.
18. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 4 – Lorsque cela a un sens, on pose $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

1. *Étude globale de f.*
   (a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$, puis donner sa dérivée.

   (b) Dresser le tableau de variations complet de f en justifiant.

   (c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même, dont la réciproque sera notée g par la suite.

   (d) Montrer qu'il existe un réel α tel que g soit dérivable sur $\mathrm{J} =]-\infty\,;\alpha[\ \cup\ ]\alpha\,;+\infty[$. On précisera α.

   (e) Exprimer $g'(y)$ en fonction de $g(y)$ uniquement, pour tout $y \in \mathrm{J}$.

   (f) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

2. *Comportement asymptotique de f en* 0.
   (a) Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0 et calculer son $\mathrm{DL}_4(0)$.

   (b) En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f.

   (d) En déduire que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \ f^{(2k+1)}(0) = 0$.

   (e) Donner une équation de la tangente à la courbe en 0 puis étudier la position relative locale entre la courbe et cette tangente.

3. *Comportement asymptotique de f en* $+\infty$.
   (a) Établir un développement asymptotique de f en $+\infty$ s'arrêtant à $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. Ce dernier ne doit contenir que des termes de la forme x^a, $\ln^b(x)$ et $\dfrac{1}{x^c}$ où a, b et c sont des entiers naturels.

   (b) En déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

4. *Comportement asymptotique de $g = f^{-1}$ en* 0.
   (a) Justifier que g admet un $\mathrm{DL}_3(0)$, que l'on écrira $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \mathrm{o}\left(y^3\right)$.

   (b) À l'aide de la relation $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ x = g(f(x))$ et du $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, déterminer les coefficients a_0, ..., a_3.