Polynômes, dénombrement et analyse asymptotique

Commentaires : *Un devoir bien mieux réussi que les précédents. J'ai moins lu de grosses bêtises et seulement chez ceux qui n'ont pas encore compris qu'il fallait travailler sur la longueur.*

Hormis ceux-là et malgré les notes, vous avez progressé. Ça commence à ressembler à quelque chose. Profitez de ces encouragement et ne lâchez rien !

Correction de l'exercice 1 –

1. $$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \mathrm{P}_1 = 1 + \mathrm{X}, \quad \mathrm{P}_2 = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2}, \quad \mathrm{P}_3 = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2} + \frac{\mathrm{X}^3}{6}.$$

2. Déterminons les deux racines complexes de P_2 et déduisons-en la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On a $\mathrm{P}_2 = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2}$. Le discriminant associé vaut
$$\Delta = 1 - 4\frac{1}{2} = -1 = (-\mathrm{i})^2.$$
Ainsi, les racines de P_2 sont $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$.

   On a alors $\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{X} - z_1)(\mathrm{X} - z_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{X} + 1 - i)(\mathrm{X} + 1 + i)$.

3. Par la question précédente, le polynôme P_2 est scindé et non irréductible dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ au contraire du polynôme P_2 qui n'est pas scindé car son discriminant est strictement négatif mais irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. On a $\mathrm{P}_3 = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2} + \frac{\mathrm{X}^3}{6}$. Donc, $\mathrm{P}_3' = 1 + \mathrm{X} + \frac{\mathrm{X}^2}{2} = \mathrm{P}_2$.

5. Si P_3 admettait des racines multiples alors elles seraient aussi racines de $\mathrm{P}_3' = \mathrm{P}_2$ qui n'admet que z_1 et z_2 comme telle.

   Comme ni z_1, ni z_2 n'est racine de P_3, ce dernier ne peut admettre de racine de multiplicité au moins 2. Il n'admet donc pas de racine multiple.

   Commentaires : *N'oubliez pas que pour être une racine multiple, certes il faut être racine de P', mais aussi et avant tout de P.*

6. On a,
$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n' &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{\mathrm{X}^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{X}^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!} = \mathrm{P}_{n-1} \quad \text{après changement d'indice.}\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\mathrm{P}_n' = \mathrm{P}_{n-1}.$$

7. D'après la question précédente,
$$\mathrm{P}_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!} - \frac{\mathrm{X}^n}{n!} = \mathrm{P}_n - \frac{\mathrm{X}^n}{n!}.$$
Donc,
$$\mathrm{P}_n' = \mathrm{P}_n - \frac{\mathrm{X}^n}{n!}.$$

8. Supposons que P_n possède une racine de multiplicité au moins 2 . Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une telle racine.

   Alors on sait que $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$.

   D'après la question précédente, on obtient que $0 = 0 - \dfrac{\alpha^n}{n!}$ *i.e.* $\alpha = 0$, car $n \neq 0$.

   Or 0 n'est clairement pas racine de P_n car $P_n(0) = 1+0 = 1 \neq 0$. On obtient donc une contradiction.

   Conclusion, le polynôme P_n ne possède que des racines simples.

Correction de l'exercice 2 –

1. Soit $n \in \{0, \dots, 1\,000\}$: c'est un multiple de 3 si et seulement s'il s'écrit $n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$.

   Il suffit donc de compter tous les entiers k tels que $0 \leqslant 3k \leqslant 1\,000$.

   Pour ce faire, écrivons la division euclidienne de $1\,000$ par 3. On a $1\,000 = 3 \times 333 + 1$.

   Ainsi,
   $$0 \leqslant 3k \leqslant 3 \times 333 + 1 \iff 0 \leqslant k \leqslant 333 + \frac{1}{3} \iff 0 \leqslant k \leqslant 333 \quad \text{car } k \in \mathbb{N}.$$
   Il y a 334 entiers k compris entre 0 et 333, donc le nombre de multiples de 3 entre 0 et $1\,000$ est de $\boxed{334.}$

   Commentaires : *Un seul tout petit piège et compter* 0*. Il aura engouffré la moitié de la classe.*

2. (a) Il s'agit d'abord de choisir trois consonnes (sur les vingt), puis deux voyelles (sur les six), soit $\dbinom{20}{3}\dbinom{6}{2} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2}\dfrac{6 \times 5}{2} = 17\,100$ possibilités vu qu'on « tire » ces lettres simultanément (l'ordre n'importe pas pour le choix des lettres et on les veut toutes distinctes).

   Une fois ces cinq lettres choisies, il s'agit de les permuter pour former un mot de cinq lettres, ce qui fait 5! possibilités.

   Au total, on obtient $\boxed{\dbinom{20}{3}\dbinom{6}{2} 5! = 2\,052\,000 \text{ mots différents.}}$

   (b) Comptons le nombre de mots (à trois consonnes et deux voyelles quelconques) contenant les trois consonnes consécutivement.

   Le nombre de façons de choisir ces lettres est toujours le même, à savoir $\dbinom{20}{3}\dbinom{6}{2}$.

   Une fois les lettres choisies, il y a trois possibilités pour que les consonnes soient consécutives : soit elles sont en positions 1, 2, 3, soit en positions 2, 3, 4, soit en positions 3, 4, 5.

   Dans chacun de ces trois cas, il y a autant de mots que de façons de permuter les trois consonnes (3! possibilités) et les deux voyelles (2! possibilités), soit $3! \times 2!$ possibilités.

   En prenant en compte les trois cas distincts, cela fait $3 \times 3! \times 2!$ possibilités pour que les consonnes se suivent.

   Bilan : le nombre de mots que l'on peut former avec trois consonnes consécutives est de $\dbinom{20}{3}\dbinom{6}{2} \times 3 \times 3! \times 2! = 615\,600$, donc par passage au complémentaire, le nombre de mots n'ayant pas trois consonnes consécutives et de $2\,052\,000 - 615\,600$ $\boxed{= 1\,436\,400.}$

3. (a) Rappelons que f est une bijection de $\mathrm{X} = \{1, \dots, 12\}$ sur lui-même si et seulement si f est injective (car X est fini).

Ainsi, f est entièrement déterminée par les images $f(i)$ de chaque $i \in \mathrm{X}$, et celles-ci doivent être toutes distinctes.

Pour respecter la propriété énoncée, il faut envoyer tous les nombres pairs sur eux-mêmes et tous les nombres impairs sur eux-mêmes.

Le nombre de bijections de $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dans lui-même étant de $6!$ (de même avec $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$), on en déduit que le nombre de bijections recherché est de $\boxed{6! \times 6! = 518\,400.}$

Commentaires : *C'est dommage que certains aient oublié d'envoyer les impairs sur eux-mêmes.*

(b) Les entiers de X divisibles par 3 sont 3, 6, 9 et 12. Comme précédemment, il s'agit d'envoyer ces quatre nombres sur eux-mêmes, et tous les autres sur eux-mêmes.

Le nombre de bijections de l'ensemble $\{3, 6, 9, 12\}$ sur lui-même étant de $4!$ et le nombre de bijections de $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ sur lui-même étant de $8!$, alors le nombre de bijections recherché est de $\boxed{4! \times 8! = 967\,680.}$

(c) Cette fois-ci, pour prendre en compte les deux propriétés, les nombres 3 et 9 doivent être envoyés sur eux-mêmes, les nombres 6 et 12 également, puis tous les pairs restants sur les pairs restants, et de même avec les impairs restants :

— le nombre de bijections de $\{3, 9\}$ sur lui-même est de $2!$;
— le nombre de bijections de $\{6, 12\}$ sur lui-même est de $2!$;
— le nombre de bijections de $\{2, 4, 8, 10\}$ sur lui-même est de $4!$;
— le nombre de bijections de $\{1, 5, 7, 11\}$ sur lui-même est de $4!$.

Donc le nombre total de bijections de X sur lui-même satisfaisant aux deux propriétés est de $\boxed{2! \times 2! \times 4! \times 4! = 2\,304.}$

Correction de l'exercice 3 –

Partie I : Étude de f

1. La fonction f est définie, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall\, x \in \,]0\,;+\infty[\,,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x},$$

dont le signe dépend de la position de x relativement à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a aussi facilement $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

Enfin, $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x)$ nous donne $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et le tableau de variations qui suit :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Commentaires : *Quand on dit complet, ça veut dire qu'on veut toutes les limites aussi.*

2. La fonction f est croissante sur $[1\,;2] \subset [1\,;+\infty[$. Donc $f(\,[1\,;2]\,) \subset [f(1)\,;f(2)] = [1\,;2-\ln(2)] \subset [1\,;2]$ *i.e.* $[1\,;2]$ est stable par f.

   Commentaires : *La continuité de f n'a rien à voir avec cette question.*

3. La fonction f est dérivable sur $[1\,;2]$.

   Pour tout $x \in [1\,;2]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$ ce qui implique $0 \leqslant f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et, en particulier,

$$\forall\, x \in [1\,;2]\,,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

   Soit x , $y \in [1\,;2]$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x\,;y]$ (ou $[y\,;x]$) et dérivable sur $]x\,;y[$ (ou $]y\,;x[$). D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall\, x, y \in [1\,;2]\,,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|\,,$$

   ce qui reste vrai pour $x = y$.

   Conclusion, la fonction f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1\,;2]$.

   Commentaires :
   - *Calculer une seule valeur de f' ou de f ne montre en rien que f est lipschitzienne.*
   - *Être lipschitzienne sur $[1\,;2]$ veut dire vérifier $|f(y) - f(y)| \leqslant k\,|x| - y$ pour TOUS les éléments x, y de $[1\,;2]$ et pas seulement 1 et 2.*

4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;1]$.

   D'après le théorème du même nom, elle établit donc une bijection de $]0\,;1]$ sur son image (l'intervalle) $[1\,;+\infty[$.

   Pour tout entier $n \geqslant 2$ appartenant à l'ensemble image, donc il existe un unique antécédent $x_n \in\,]0\,;1]$ tel que $f(x_n) = n$.

   Par le même raisonnement avec f strictement croissante de $[1\,;+\infty[$ sur son image $[1\,;+\infty[$, il existe aussi un unique réel $y_n \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(y_n) = n$.

   Commentaires : *« Continue » et « strictement monotone », vous l'avez bien. Reste à penser à dire « intervalle » et à vérifier que la valeur dont on veut un antécédent, unique ou pas, appartient à l'intervalle image.*

Partie II : La première suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

   Par définition de $x_n \in\,]0\,;1]$, $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$ donc $f(x_n) < f(x_{n+1})$.

   La fonction f étant strictement décroissante sur $]0\,;1]$, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$ *i.e.* la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement (monotone) décroissante.

   Minorée par 0, le théorème de convergence monotone entraîne sa convergence vers un réel ℓ positif.

Commentaires : *Positif ne veut pas dire encore 0. Une suite décroissante et minorée par 0 comme $1+\dfrac{1}{n}$ converge vers 1 qui est bien et seulement positif.*

6. Comme f est continue sur $]0\,;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$.

   Or, par définition de x_n, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

   Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous assure encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   En conclusion, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers $\ell = 0$.
7. Il suffit de composer l'équation caractéristique de x_n par l'exponentielle :
$$\forall\, n \geqslant 2,\ n = x_n - \ln(x_n) \iff \ln(x_n) = x_n - n \iff x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}.$$
8. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, on a :
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}(1+\mathrm{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n}).$$
9. Il suffit de réinjecter le résultat précédent et gérer les prépondérance pou $n\to+\infty$:
$$\begin{aligned} x_n &= \mathrm{e}^{-n+x_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n})}.\end{aligned}$$
   Avec $\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n}) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, on développe encore l'exponentielle :
$$\begin{aligned} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1 + \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n}) + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n}))^2}_{\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n})}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}(1+\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-n}))\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n}).\end{aligned}$$

   Commentaires : *Pour poursuivre le développement (asymptotique) il suffirait d'appliquer encore la méthode :*
$$\begin{aligned} x_n &= \mathrm{e}^{-n+x_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n})}.\end{aligned}$$
   Avec $\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n}) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, *on développe encore l'exponentielle :*
$$\begin{aligned} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n}))^2\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\mathrm{e}^{-n}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n}) + \underbrace{\frac{1}{2}(2\,\mathrm{e}^{-3n}+\mathrm{e}^{-4n}+2\,\mathrm{e}^{-n}\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n})+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-4n}))}_{\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n})}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\mathrm{e}^{-n}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-2n})\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3n}+\mathrm{o}(\mathrm{e}^{-3n}).\end{aligned}$$

Partie III : Une suite récurrente

10. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $u_0 \in [1\,;2]$. La stabilité de $[1\,;2]$ par f fait le reste.
11. La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

    De plus, comme $1 < \dfrac{3}{2}$, $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$ et $u_1 = u_0 - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

12. Monotone et bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Comme f est continue sur $[1\,;2]$, la suite converge vers un de ses points fixes, solution de l'équation $x-\ln(x)=x \iff x=1$.

Comme $1\in[1\,;2]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Commentaires : *Sans continuité de f, point de points fixes et point de points.*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $p_n=\prod_{k=0}^{n} u_k$.

13. Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs à 1 d'après les questions précédentes (et en particulier strictement positifs). Par produit d'inégalités dans le même sens et à membres strictement positifs, on en déduit :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ p_n\geqslant 1.$$

Commentaires : *À quoi sert cette question ? Vous l'êtes-vous demandé ?*

14. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_n est non nul et on a :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=u_{n+1}\geqslant 1.$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

15. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, k\in\mathbb{N},\ u_{k+1}=u_k-\ln(u_k)$ *i.e.* $\ln(u_k)=u_k-u_{k+1}$.

En sommant ces égalités pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\ln(u_k)=\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})=u_0-u_{n+1},$$

en reconnaissant une somme télescopique.

16. Réécrivant le résultat précédent, on a :

$$\ln(p_n)=u_0-u_{n+1} \implies p_n=\mathrm{e}^{u_0-u_{n+1}}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers 1, on en déduit que c'est le cas pour la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, par continuité de l'exponentielle, on en déduit également sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

17. D'après la partie I, la fonction f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1\,;2]$.

Comme 1 et u_n sont éléments de $[1\,;2]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on en déduit :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ |f(u_n)-f(1)|\leqslant\frac{1}{2}\,|u_n-1|\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$, donc les valeurs absolues sont caduques et, avec 1 point fixe de f, on obtient finalement :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-1\leqslant\frac{1}{2}\,(u_n-1)\,.$$

18. Par récurrence, il est aisé de montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^n}\,(u_0 - 1) \leqslant \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On en déduit que $\dfrac{u_n - 1}{\frac{1}{2^n}} \leqslant \dfrac{1}{2}$ *i.e.* $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ ce que l'on note :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Commentaires : *Grand O et non petit o !*

Correction de l'exercice 4 –

1. *Étude globale de f.*

(a) La fonction polynomiale $x \longmapsto 1 + x^2$ est $\mathscr{C}^\infty$ dur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives donc il en est de même de $x \longmapsto \ln(1 + x^2)$ par composition puis de f, somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - (1+x^2)}{1+x^2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{1+x^2}\ \boxed{= -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}}.$$

Commentaires : *Un jour, j'aimerais bien que vous compreniez définitivement que « définie » n'est pas une propriété mais juste une locution traditionnelle pour dire que l'on travaille bien avec quelque chose qui existe i.e. dont on peut calculer les images. Il ne sert donc à rien d'insister sur ce point et oublier ou mal justifier la réelle propriété « $\mathscr{C}^\infty$ ».*

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Grâce à ce qui précède, $f'(x) \leqslant 0$ ne s'annulant qu'en 1.

On obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

Justifions les limites :

— Comme $-x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(1+x^2) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (composition), alors par somme, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

— Pour la limite en $+\infty$, on factorise par les termes prépondérants :

$$f(x) = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - x = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)}\right) - x \quad (\text{car } x > 0 \text{ au voisinage de } +\infty)$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} -x + \underbrace{2\ln(x)}_{\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)} + \underbrace{\frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)} + \underbrace{\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)}$$

$$\underset{x\to+\infty}{=} -x + \mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x.$$

Conclusion, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Commentaires : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ *n'est pas un résultat de croissances comparées que vous pouvez affirmer. Qui vous dit que le* x^2 *dans le* $\ln$ *ne rend pas celui-ci prépondérant sur* x *?*

(c) Grâce à ce qui précède, f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (car $\mathscr{C}^\infty$) et strictement décroissante (car $f' \leqslant 0$ et ne s'annule qu'en 1), donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ au vu des limites calculées ci-dessus.

Commentaires : *f admet une réciproque ou établit une bijection mais pas un mélange des deux verbes.*

(d) La fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, dérivable et sa dérivée ne s'annule qu'en 1.

D'après le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque, g est donc dérivable sur tout intervalle (ouvert) ne contenant pas $f(1) = \ln(2) - 1$ que l'on notera α.

En conclusion, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathrm{J} = \ ]-\infty\,;\alpha[\ \cup\ ]\alpha\,;+\infty[.}$

Commentaires : *Si $f'(a) = 0$ alors g n'est pas dérivable au voisinage de $f(a)$ et pas a qui ne représente rien pour la réciproque.*

Merci à Thomas d'y avoir pensé. Je me sentais seul.

(e) Avec l'expression de la dérivée de f, on trouve :

$$\boxed{\forall\ y \in \mathrm{J}, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = -\frac{1+g(y)^2}{(g(y)-1)^2}.}$$

(f) Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, d'après le théorème de régularité d'une bijection réciproque, $\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur J.}}$

2. *Comportement asymptotique de f en 0.*

(a) La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ admet un DL à tout ordre en 0 donc f aussi par composition à droite par $x \longmapsto x^2$ et somme :

On utilise le DL $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}\left(u^2\right)$ directement avec $u = x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$:

$$f(x) = \ln(1+x^2) - x \ \boxed{\underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right).}$$

Commentaires :

— *Il est tout à fait inutile d'invoquer le théorème de Taylor-Young ici. On obtient le DL de f à partir de celui de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.*

— *$\mathscr{C}^\infty$ tout court ne suffit pas. Il faut dire où et surtout sur un voisinage de 0 si vous voulez affirmer l'existence d'un DL en ce point.*

(b) Comme f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (qui contient 0), d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre en 0 qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right).}$$

Par **unicité du DL**, on obtient en particulier *i.e.* on peut identifier :

$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{2} \quad i.e. \quad \boxed{f^{(4)}(0) = -12.}$$

Commentaires : *Ici, le théorème de Taylor-Young et l'unicité du DL étaient importants.*

(c) On utilise $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{u^n}{n} + \mathrm{o}\left(u^n\right)$ directement avec $u = x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$:

$$\boxed{f(x) = \ln(1+x^2) - x \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right).}$$

Commentaires : *On n'oublie pas le* $\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$ *!*

(d) On constate que tous les termes d'ordre impairs sont nuls (sauf pour x dont le coefficient vaut -1).

Par **unicité** du DL, et toujours en utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient

$$\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \ldots = \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!} = 0,$$

c'est-à-dire $f'''(0) = \ldots = f^{(2n-1)}(0) = 0$.

Comme n est arbitraire, on a bien $\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\quad f^{(2k+1)}(0) = 0.}$

Commentaires : *La clé des points était le mot « unicité ».*

(e) Par troncature du DL, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, donc la tangente à l'origine a pour équation $\boxed{y = -x.}$

De plus, $f(x) - (-x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \geqslant 0$, donc la courbe est $\boxed{\text{au-dessus}}$ de sa tangente au voisinage de 0.

Commentaires : *Vos rédactions étaient, en général, très moyennes. L'équation de la tangente comme étant la partie affine peut être affirmée mais la position se doit d'être justifiée comme je l'ai fait avec un équivalent voire une petite phrase disant que dans un voisinage de 0, deux fonctions équivalentes (donc non nulles) ont le même signe.*

3. *Comportement asymptotique de f en $+\infty$.*

(a) Il suffit de poursuivre le calcul débuté pour l'étude de la limite en $+\infty$:

$$f(x) = 2\ln(x) - x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{(car } x > 0\text{)}$$

$$\boxed{\underset{x\to+\infty}{=} -x + 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

Commentaires : *Dans l'écriture du DL, on vérifiera bien que* $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(x\right)$, $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\ln(x)\right)$ *et* $\frac{1}{x^4} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(b) D'après la question précédente, comme $2\ln(x)+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^4}\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(x\right)$, on a toujours

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-x\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty.$$

En outre, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^4}\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\ln(x)\right)$ entraîne aussi

$$f(x)-(-x)\underset{x\to+\infty}{\sim}2\ln(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

La courbe présente donc $\boxed{\text{une branche parabolique dirigée selon la droite d'équation } y=-x.}$

4. *Comportement asymptotique de $g=f^{-1}$ en 0.*

(a) D'après la question (1f), g est $\mathscr{C}^\infty$ sur J qui contient $0=f(0)$, donc en particulier au voisinage de 0 *i.e.* $\boxed{g \text{ admet un } \mathrm{DL}_3(0).}$

(b) Rappelons que la relation $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \ x=g(f(x))$ provient du fait que $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
x+\mathrm{o}\left(x^3\right)&=g(f(x))\\
&\underset{x\to0}{=}g(\underbrace{-x+x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)}_{y\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(1)})\\
&\underset{x\to0}{=}a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right)\\
&\underset{x\to0}{=}a_0+a_1(-x+x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right))+a_2(-x+x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right))^2\\
&\qquad\qquad+a_3(-x+x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right))^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to0}{=}a_0-a_1x+a_1x^2+a_2(x^2-2x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)) \qquad \text{(factorisation par } -x \text{ dans le cube)}\\
&\qquad\qquad-a_3x^3(1-x+\mathrm{o}\left(x^2\right))^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to0}{=}a_0-a_1x+(a_1+a_2)x^2-2a_2x^3-a_3x^3(1+\mathrm{o}\left(1\right))+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to0}{=}a_0-a_1x+(a_1+a_2)x^2-(2a_2+a_3)x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par **unicité** du DL, on obtient :

$$\begin{cases}a_0=0\\-a_1=1\\a_1+a_2=0\\-(2a_2+a_3)=0\end{cases}\iff\begin{cases}a_0=0\\a_1=-1\\a_2=-a_1=1\\a_3=-2a_2=-2.\end{cases}$$

Conclusion, $\boxed{g(y)\underset{y\to0}{=}-y+y^2-2y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right).}$

Commentaires : *Comme déjà expliqué, au risque de tomber sur un système non linéaire, on pouvait trouver le DL de g à partir de la relation $\forall\, y\in\mathbb{R},\ f(g(y))=y$:*

Remarquons d'abord que $g(0)=0\implies g(y)\underset{y\to0}{=}a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right)\underset{y\to0}{=}\mathrm{o}\left(1\right)$ i.e. $a_0=0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&\forall\, y\in\mathbb{R},\ f(g(y))=y\\
&f(a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right))=y+\mathrm{o}\left(y^3\right)\\
-(a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right))+(a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right))^2+&\underbrace{\mathrm{o}\left((a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right))^3\right)}_{\underset{y\to0}{=}\mathrm{o}(y^3)}\underset{y\to0}{=}y+\mathrm{o}\left(y^3\right)\\
-a_1y+(a_1^2-a_2)y^2+(2a_1a_2-a_3)y^3+\mathrm{o}\left(y^3\right)&\underset{y\to0}{=}y+\mathrm{o}\left(y^3\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du DL, on identifie les coefficients :

$$\begin{cases} -a_1 & = 1 \\ a_1^2 - a_2 & = 0 \\ 2a_1a_2 - a_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 & = -1 \\ a_2 & = 1 \\ a_3 & = -2. \end{cases}$$

On retrouve : $g(y) \underset{y\to 0}{=} -y + y^2 - 2y^3 + \mathrm{o}\left(y^3\right)$.