Chapitre

XXIV Probabilités

Un médecin annonce à un de ses patients :

- J'ai une bonne et une mauvaise nouvelle, je commence par la mauvaise.

Vous avez une maladie grave dont on ne guérit qu'avec une probabilité de 1 sur 10.

- Et la bonne nouvelle docteur ?

- Mes neuf derniers patients sont morts…

CONTENU

I/ Expérience aléatoire

I.1 L'Univers

Définition 1 : On appelle :

- *expérience aléatoire*, toute expérience dont on ne peut prédire l'issue avec certitude.
- *univers* l'ensemble, souvent noté Ω, de toutes les issues possibles.
- *événement*, *éventualité* ou encore *issue* toute partie ω de l'univers Ω.
- *événement élémentaire* tout événement constitué d'une seule issue ou d'un seul élément.

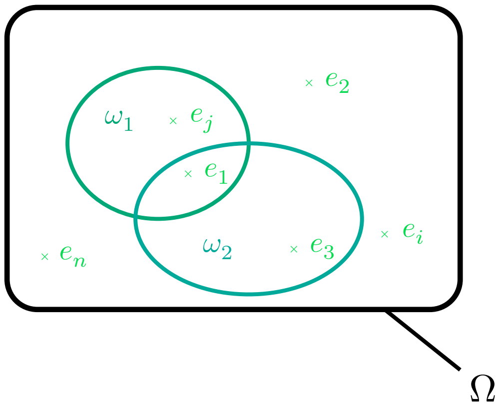


Figure XXIV.1 – Univers et événements

Remarques :

— L'expérience est aléatoire : on ne sait pas à l'avance quelle en sera l'issue. Mais on suppose qu'on connaît l'ensemble des issues possibles.

— Il peut exister plusieurs modélisations associées à une même expérience aléatoire, et à chacune, on associera un univers différent. Pour le lancer du dé, on pourrait s'intéresser à la position du dé sur la table, ou la température de la pièce après le lancer... L'univers serait alors non plus $\{1,2,3,4,5,6\}$ mais $[0,3] \times [0,2]$ ou $\mathbb{R}_+$. Il faut donc toujours commencer par préciser l'univers avec lequel on travaille.

— Toute partie d'un univers fini est appelée un événement. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$ (dont on connaît le cardinal)

Exemples 1 :

1. On lance un dé. Les résultats possibles sont $1,2,3,4,5,6$.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

   Il y six événements élémentaires : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ à ne pas confondre avec les issues.

   $A = \{2,4,6\}$ est un événement. Il peut être décrit par une phrase : A :« Obtenir un nombre pair »

2. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

   Les résultats possibles sont : $7\heartsuit$, $7\diamondsuit$, $7\spadesuit$, $7\clubsuit$, $8\heartsuit$, $\cdots$, $A\heartsuit$, $A\diamondsuit$, $A\spadesuit$, $A\clubsuit$.

$$\Omega = \{7\heartsuit, 7\diamondsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, 8\heartsuit, \cdots, A\heartsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit, A\clubsuit\}$$

   L'événement K:« Tirer un roi » : est $K = \{R\heartsuit, R\diamondsuit, R\spadesuit, R\clubsuit\}$.

3. Le temps d'attente avant la désintégration d'un noyau radioactif est un réel positif.

$$\Omega = \mathbb{R}_+$$

   Remarque : lorsque l'univers est infini toutes les parties de Ω ne sont pas des événements.

Définition 2 : Soit Ω un univers fini.

On appelle :

- événement *impossible* l'ensemble vide : $\emptyset$
- événement *certain* l'univers entier : Ω

Définition 3 : Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.

- Le *complémentaire* de A dans Ω, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est appelé événement *contraire* à A.
- La *réunion* $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ de A et B est un événement appelé « A ou B ».
- L'*intersection* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ de A et B est un événement appelé « A et B ».
- Lorsque « A et B » est l'événement impossible (*i.e.* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$) les événements A et B sont dits *incompatibles*.

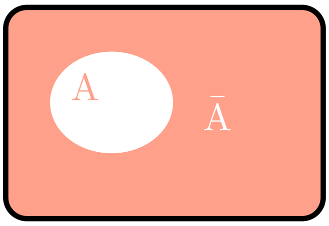


Figure XXIV.2 – Événement contraire

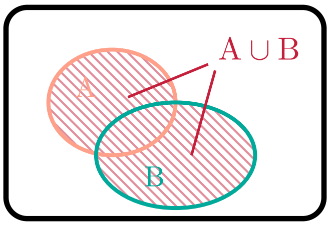


Figure XXIV.3 – Événement réunion

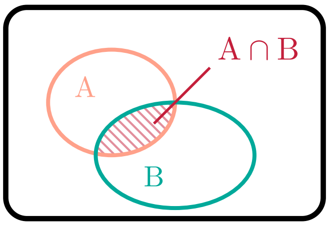


Figure XXIV.4 – Événement intersection

Exemple 2 : Considérons l'expérience consistant à lancer deux fois une pièce, modélisée par l'univers $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^2$.

Notons :

- A l'événement « la première pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{A} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{F})\}$
- B l'événement « la deuxième pièce montre pile » *i.e.* $\mathrm{B} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{F}\,;\mathrm{P})\}$.

1. L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est « une des deux pièces montre pile » *i.e.*

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{(\mathrm{F}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{P}\,;\mathrm{F})\}.$$

2. L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est « les deux pièces montrent pile » *i.e.*

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{(\mathrm{P}\,;\mathrm{P})\}.$$

3. L'événement contraire de A « la première pièce montre face » *i.e.*

$$\overline{\mathrm{A}} = \{(\mathrm{F}\,;\mathrm{P}), (\mathrm{F}\,;\mathrm{F})\}.$$

I.2 Système complet d'événements

Définition 4 : Soit Ω un univers fini.

On appelle *système complet d'événements* de Ω toute famille $(A_1, \cdots, A_p)$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

1. $\forall i \in [\![1\,;p]\!],\ A_i \neq \emptyset$ (non vides)
2. $\forall i, j \in [\![1\,;p]\!],\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ (deux à deux incompatibles)
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega$ (recouvrant l'univers)

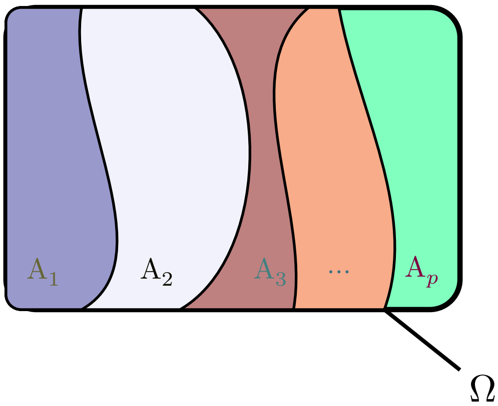


Figure XXIV.5 – Système complet d'événements.

Exemples 3 :

1. Si A est un événement (non impossible et non certain), A et $\overline{A}$ forment toujours un système complet d'événements.

   C'est le cas le plus courant. Par exemple, en tirant une carte, soit la carte est rouge, soit elle n'est pas rouge.
2. Les événements :

   — H:« Tirer un cœur »,
   — S:« Tirer un pique »,
   — D:« Tirer un carreau »,
   — C:« Tirer un trèfle »

   forment également un système complet d'événements.
3. La famille $\Big(\{\omega\}\Big)_{\omega\in\Omega}$ formée des événements élémentaires, est un système complet d'événements de Ω

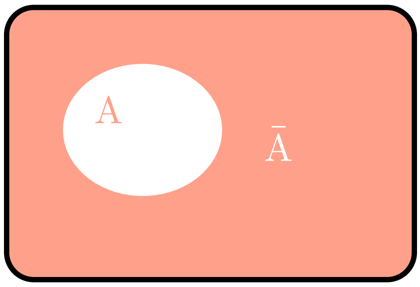


Figure XXIV.6 – Partition de l'univers à partir de A et $\overline{\mathrm{A}}$.

À retenir 1 :

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
l'ensemble	l'univers
un élément	une issue
un singleton	un événement élémentaire
une partie	un événement
l'ensemble vide	l'événement impossible
le complémentaire	l'événement contraire
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	« A et B »
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	« A ou B »
A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
partition	système complet d'événements

II/ Probabilité

II.1 Espace probabilisé

Définition 5 : Soit Ω un univers fini.

- On appelle *probabilité* sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  2. pour tout couple d'événements incompatibles A et B, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \sqcup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}).$$

- On appelle *espace probabilisé* tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Exemple 4 : On considère le lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

— Une probabilité sur Ω est $\mathbb{P}_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \dfrac{1}{6}\,\text{card}\,A \end{array}$ (dé non pipé)

— On peut aussi définir $\mathbb{P}_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0\,;1] \\ A & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases} \end{array}$ $\left(\begin{array}{l}\text{dé pipé pour tomber} \\ \text{sur 6 à tous les coups}\end{array}\right)$

Corollaire 0.1 :
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω fini.

1. Si $A_1, A_2, \cdots, A_p$ (avec $p \in \mathbb{N}^\star$) sont des événements deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)$$
2. En particulier, si A_1, $A_2, \cdots$, A_p (avec $p \in \mathbb{N}^\star$) est un système complet d'événements, alors
$$\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Exercice 1 : Déterminer une probabilité P sur $\Omega = [\![1, n]\!]$ telle que $P(\{k\})$ soit proportionnelle à k^2.

Proposition 1 (Propriétés) :
Soit $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ (probabilité de l'événement contraire)
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (probabilité de l'événement impossible)
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance de la probabilité)
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (probabilité de la réunion)

Exercice 2 : Soient A et B des événements d'un univers Ω tels que :
$$P(A) = 0,3\,; \qquad P(B) = 0,4 \quad \text{et} \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9.$$
Quelle est la probabilité que se réalise l'un des événements A ou B ?

Corollaire 1.1 :
Soient $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(\mathrm{A}_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'événements.

Alors,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\mathrm{A}_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i).$$

Corollaire 1.2 (Propriété des probabilités totales) :
Soient $(\Omega\,;\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement B, on a :
$$\mathbb{P}(\mathrm{B})=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i).$$

En particulier, si $\mathrm{B}=\Omega$, on retrouve $1=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$.

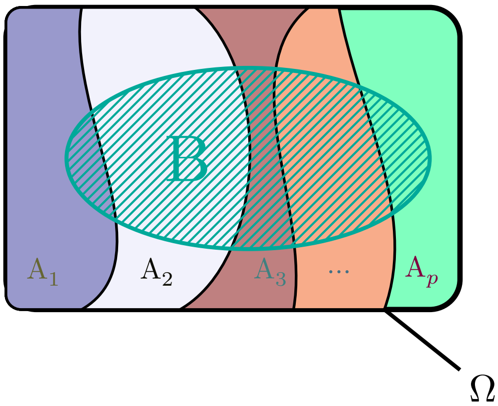


Figure XXIV.7 – $\mathrm{B}=\bigcup_{i=1}^{p}\left(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i\right)$

II.2 Fondations

Théorème 2 :
Soient $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ et p_1, p_2 , $\cdots$, p_n des réels.

On a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. $\forall\, i\in[\![1\,;n]\!]$, $p_i\geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.
2. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que : $\forall\, i\in[\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(\{\omega_i\}\Big)=p_i$.

En particulier,
$$\forall\,\mathrm{A}\in\mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(\mathrm{A})=\sum_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ \omega_i\in\mathrm{A}}}p_i.$$

Remarque : Les deux conditions de la première assertion entraînent aussi que $p_i \leqslant 1$. Ce n'est qu'une condition nécessaire.

Exemple 5 : Pour le lancer d'un dé, on peut poser :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$0,2$	$0,05$	$0,3$	$0,05$	$0,3$	$0,1$

Et alors, si on considère l'événement : E : « Obtenir un nombre pair », on a $\mathrm{E} = \{2, 4, 6\}$.

D'où $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,2$.

II.3 Probabilité uniforme

De manière générale, soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathbb{P}\Big(\{\omega_i\}\Big) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

Définition 6 : Soit Ω un univers fini.

On appelle *probabilité uniforme*, ou *équiprobabilité* sur Ω l'unique probabilité attribuant la même probabilité à tous les événements élémentaires.

Remarque : Si $\operatorname{card}(\Omega) = n$ alors la probabilité de chaque événement élémentaire est $p = \dfrac{1}{n}$.

ω	ω_1	ω_2	$\cdots$	ω_n
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	p	p	$\cdots$	p

En effet, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} p = p \sum_{\omega\in\Omega} 1 = pn$.

Proposition 3 :
Soit Ω un univers fini, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.

Alors, pour tout événement A :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{\operatorname{card}(\mathrm{A})}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

ATTENTION

Cette relation ne s'applique que pour la probabilité uniforme.

Si on reprend l' exemple (5) du dé précédent, on avait $\mathbb{P}(\mathrm{E}) = 0,2$.

Or, $\dfrac{\operatorname{card}(\mathrm{E})}{\operatorname{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq \mathbb{P}(\mathrm{E})$.

Remarque : L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique lorsqu'aucun événement élémentaire n'est favorisé.

Exercice 3 : On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux rois ?

III/ Probabilité conditionnelle

Exemple 6 : Dans une classe, en notant :

— G : les élèves mesurant plus de 1,80m

— H les étudiants de sexe masculin.

On obtient la répartition ci-contre :

	G	$\overline{G}$	Total
H	8	12	20
$\overline{H}$	3	11	14
Total	11	23	34

On choisit un élève au hasard pour passer au tableau.

— La probabilité que l'élève soit grand est $\mathbb{P}(G) = \dfrac{\text{card}\,(G)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{11}{34}$.

— La probabilité que l'élève soit grand parmi les élèves de sexe masculin est

$$\mathbb{P}_H(G) = \frac{\text{card}\,(G \cap H)}{\text{card}\,(H)} = \frac{8}{20}.$$

— La probabilité que l'élève soit de sexe masculin parmi les grands est

$$\mathbb{P}_G(H) = \frac{\text{card}\,(G \cap H)}{\text{card}\,(G)} = \frac{8}{11}.$$

On remarquera que $\mathbb{P}(G) \neq \mathbb{P}_H(G)$ et on dira plus tard que les événements G et H ne sont pas indépendants.

Définition 7 : On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On appelle *probabilité conditionnelle de* B *sachant* A, notée $P(B|A)$ ou $P_A(B)$ le quotient :

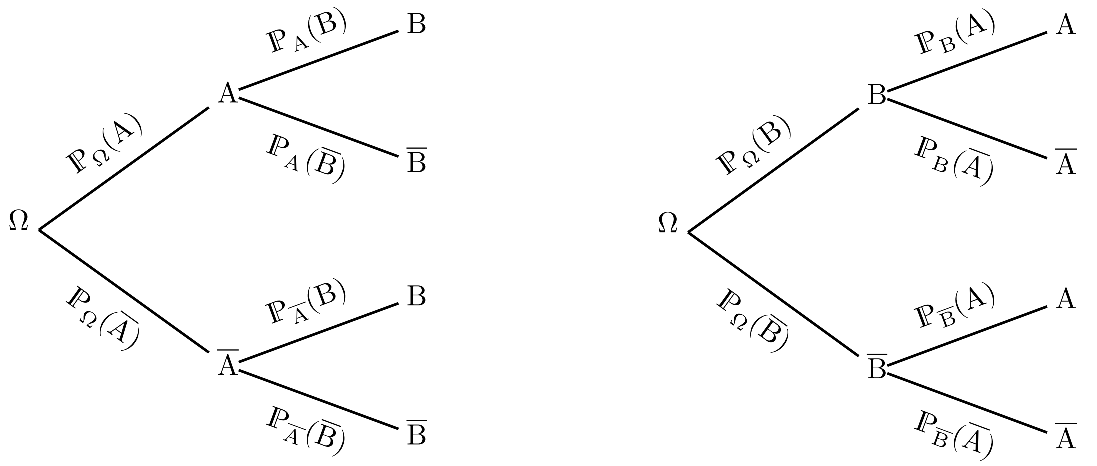
$$P_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Proposition 4 :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array}$ est une probabilité sur Ω appelée *probabilité conditionnelle sachant* A.

Remarques :

1. Toute probabilité peut être vue comme une probabilité conditionnelle : $P(A) = P_\Omega(A)$.
2. Les probabilités conditionnelles sont les probabilités écrites sur les branches :



3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent :

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$
$$\text{et } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

$$A = (B \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)$$
$$\text{et } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A).$$

Exercice 4 : On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

III.1 Probabilités composées

Théorème 5 :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ une famille finie d'événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}) \neq 0$.

Alors, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) \text{ si } \mathbb{P}(B) \neq 0.\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) \text{ si } \mathbb{P}(A) \neq 0.\end{aligned}$$

Remarque : Cette formule correspond simplement à la multiplication des probabilités sur les branches d'un arbre lors de son parcours.

Exercice 5 : Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

III.2 Probabilités totales

Théorème 6 (Propriété des probabilités totales bis) :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$un système complet d'événements (tous non impossibles).

Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Remarque : Cette formule correspond simplement à la disjonction des cas.

Exercice 6 : X et Y s'entraînent au tir à l'arc.

X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur trois.

Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

III.3 Formule de Bayes

Théorème 7 :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient A, B deux événements de probabilités non nulles. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B).$$

Remarque : Si on considère l'événement A antérieur à l'événement B, on peut voir A comme la cause et B comme la conséquence. La formule de Bayes permet de renverser ces notions : connaissant la conséquence, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ?

Exercice 7 : Reprenons l' exercice (6) . L'un des joueurs a atteint la cible.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

Corollaire 7.1 (Formule de Bayes [1]) :
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère un système complet d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ de probabilités non nulles.

Si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)} \mathbb{P}_{A_j}(B).$$

IV/ Indépendance

IV.1 Avec deux événements

Définition 8 : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 8 :
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

Deux événements de probabilité non nulle A et B sont indépendants
si, et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad$ ou $\quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

[1]. **Thomas Bayes**, né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 17611 à Tunbridge Wells, dans le Kent, est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Proposition 9 :
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements.
— A est indépendant avec lui-même si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
— A et B sont indépendants si, et seulement si

1. $\bar{A}$ et B,
2. A et $\bar{B}$,
3. ou $\bar{A}$ et $\bar{B}$

le sont aussi.

Méthode 1 (Montrer que deux événements sont indépendants ou pas ...) :
— On calcule séparément $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.
— Suivant l'égalité ou non, on conclue à l'indépendance ou non.

Exercice 8 : Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.

Un client se présente et choisit un meuble.

On considère les évènements :
— F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
— C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

IV.2 Avec une famille d'événements

Lorsqu'on considère plus de deux événements, il y a deux manières de généraliser l'indépendance :

Définition 9 : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère une famille finie d'événements $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$).
— Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits *deux à deux indépendants* lorsque :

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \implies \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

— Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont dits *mutuellement indépendants* lorsque :

$$\forall\, I \in \mathcal{P}\left([\![1\,;n]\!]\right), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

CHAPITRE XXIV. PROBABILITÉS

ATTENTION

Il est clair que l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque n'est pas vraie !

Des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants. La condition est beaucoup plus forte que ça.

Par exemple, pour trois événements, on doit avoir $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3)$ mais aussi $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$.

Les conditions à vérifier deviennent rapidement affreuses quand on augmente le nombre d'évènements.

Contre-Exemple 7 : On considère une pièce qu'on lance deux fois et on considère les événements suivants :

A : « On obtient pile au premier lancer »

B : « On obtient face au deuxième lancer »

C : « On obtient deux lancers différents »

1^{er} / $2^{\text{ème}}$	P	F
P	(P,P)	(P,F)
F	(F,P)	(F,F)

On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2}$.

On voit facilement que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4}$.

Donc les événements sont deux à deux indépendants.

Pourtant, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{8}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Proposition 10 :
Soient A_1, ...,A_n des événements mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

Alors B_1, ..., B_n sont mutuellement (resp. deux a deux) indépendants.

Corollaire 10.1 :
Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

Alors :

1. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.

2. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.
3. $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.
4. $A_1 \cup \ldots \cup A_p$ et $A_{p+1} \cap \ldots \cap A_n$ sont indépendants.

Exercice 9 : Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$:

1. si A et B sont indépendants ;
2. si A et B sont incompatibles.

Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.

Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.

Un mathématicien s'en moque.