

Analyse asymptotique et dénombrements

Correction de l'exercice 1 – On reprends les notations du devoir surveillé ...

Partie IV : Une seconde suite implicite

19. Le même raisonnement que pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne, $\forall n \geq 2$, $f(y_n) = n < n+1 = f(y_{n+1})$. La stricte croissance de f sur $]1; +\infty[$ fait le reste.

Conclusion, la suite $(y_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

20. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(y_n)_{n \geq 2}$ est divergente vers $+\infty$ si, et seulement si elle n'est pas majorée.

Supposons donc le contraire et soit $M > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq M$.

Alors, par définition de $(y_n)_{n \geq 2}$, $n = y_n - \ln(y_n)$ entraînerait $n \leq 2M$ ce qui n'est pas possible. Donc la suite $(y_n)_{n \geq 2}$ n'est pas majorée. Elle diverge donc vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty.$$

21. Par concavité de la fonction $x \mapsto \ln(2x)$, sa courbe représentative est sous ses tangentes. En particulier celle en 1 d'équation $y = x - (\ln(e) - \ln(2))$ ce qui se traduit par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln(2x) \leq x - \underbrace{(\ln(e) - \ln(2))}_{>0} < x.$$

22. Par stricte croissance de f sur $]1; +\infty[$ donc sur $[n; 2n]$, il suffit de montrer $f(n) = n - \ln(n) < n$ pour $n \geq 2$ et $f(2n) = 2n - \ln(2n) > 2n - n = n > 0$ ce qui est assez clair.

Donc, $\forall n \geq 2$, $n < y_n < 2n$.

23. Comme $\ln(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o(u)$ d'après les théorèmes décroissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ et la définition de $(y_n)_{n \geq 2}$, $n = y_n - \ln(y_n)$ entraînent :

$$n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} y_n + o(y_n) = y_n(1 + o(1)) \iff y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

24. Il suffit de réinjecter le résultat précédent dans la définition de y_n :

$$\begin{aligned} n = y_n - \ln(y_n) &\iff y_n = n + \ln(y_n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n + o(n)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n) + \ln 1 + o(1) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n) + o(1) \end{aligned}$$

Encore une fois :

$$\begin{aligned}
 y_n &= n + \ln(y_n) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n + \ln(n) + o(1)) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n) + \ln \left(1 + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)} \right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \ln(n) + \ln \left(\frac{\ln(n)}{n} \right) + o \left(\frac{\ln(n)}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 –

1. Nombre de résultats en tout :

10^5 résultats en tout.

2. Les cinq boules sont toutes de la même couleur :

- 5 boules jaunes : 1^5 possibilité.
- 5 boules bleues : 2^5 possibilités.
- 5 boules rouges : 3^5 possibilités.
- 5 boules vertes : 4^5 possibilités.

En tout :

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 1\,300 \text{ résultats monochromes.}$$

3. les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules :

Il y a donc deux boules de la même couleur et une boule de chaque autre couleur. On discute selon la couleur représentée en double.

- 2 boules jaunes :
 - 1^2 choix de boules jaunes (deux fois la boule 1) ;
 - $\binom{5}{2}$ manières de placer des deux boules jaunes ;
 - $\binom{2}{1}$ choix de la boule bleue ;
 - $\binom{3}{1}$ choix de la boule rouge ;
 - $\binom{4}{1}$ choix de la boule verte ;
 - $3!$ manière de placer ces trois boules.

Bilan : $1^2 \times \binom{5}{2} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1} 3! = 10 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = 1440$ possibilités avec deux boules jaunes.

- 2 boules bleues : $2^2 \times \binom{5}{2} \binom{1}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1} 3! = 2880$ possibilités.
- 2 boules rouges : $3^2 \times \binom{5}{2} \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{4}{1} 3! = 4320$ possibilités.
- 2 boules vertes : $4^2 \times \binom{5}{2} \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} 3! = 5760$ possibilités.

Donc, 14 400 résultats polychromes.

4. La boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

La boule 8 n'est pas rouge.

Elle doit être tirée, et apparaît donc 1, 2 ou 3 fois.

Si on tire la boule 8 exactement 3 fois :

- $\binom{5}{3}$ manières de placer la boule 8 ;
- 3 choix de la boule rouge pour le premier emplacement libre ;
- 3 choix de la boule rouge pour le deuxième emplacement libre.

$$\binom{5}{3} \times 3^2 = 10 \times 9 = 90 \text{ possibilités.}$$

Si on tire la boule 8 exactement 2 fois :

- $\binom{5}{2}$ manières de placer la boule 8 ;
- $\binom{3}{2}$ manières de placer les boules rouges ;
- 3^2 choix des boules rouges.
- 6 choix de la dernière boule ni 8 ni rouge.

$$\binom{5}{2} \binom{3}{2} \times 3^2 \times 6 = 10 \times 3 \times 9 \times 6 = 1\,620 \text{ possibilités.}$$

Si on tire la boule 8 exactement 1 fois :

- $\binom{5}{1}$ manières de placer la boule 8 ;
- $\binom{4}{2}$ manières de placer les boules rouges ;
- 3^2 choix des boules rouges.
- 6 choix de la première boule ni 8 ni rouge (1ère place).
- 6 choix de la deuxième boule ni 8 ni rouge (2ème place).

$$\binom{5}{1} \binom{4}{2} \times 3^2 \times 6^2 = 5 \times 6 \times 9 \times 6^2 = 9\,720 \text{ possibilités.}$$

Bilan :

- 3 fois la boule 8 : 90 possibilités.
- 2 fois la boule 8 : 1 620 possibilités.

— 1 fois la boule 8 : 9 720 possibilités.

Donc, 11 430 résultats avec 2 boules rouges et la boule 8 tirée.

