

Fichiers Espace-Vectoriel a, b et c

Exercices faciles : _____

Exercice 1 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$;
- Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et de même $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.

Par conséquent, $\lambda P + \mu Q \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Exercice 2 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}.$$

Correction :

1. (a) $(0, 0, 0) \in E_1$.
 (b) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_1 . On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$.
 Donc $3(x + x') - 7(y + y') = (z + z')$, d'où $(x + x', y + y', z + z')$ appartient à E_1 .
 (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$
 donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1 .
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc
 $(1, 0, -1)$ et $(1, 0, 1)$ appartiennent à E_2 mais $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 0)$ n'appartient pas à E_2
 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Correction :

- E_3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet :
 - $(0, 0, 0) \in E_3$.
 - Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_3 . On a donc $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$. Donc $(x+x') + (y+y') - (z+z') = (x+x') + (y+y') + (z+z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_3 .
 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_3$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3 .
- Les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 4 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}.$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}.$$

Correction :

- E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
- E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}.$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\}.$$

Correction :

- E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3 .
- E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2, 0) \in E_4$ mais $-(2, 0) = (-2, 0) \notin E_4$.

Exercice 6 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}.$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}.$$

Exercice 7 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}.$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}.$$

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .
- L'ensemble des fonctions monotones.
- L'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 9 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions bornées sur $[-1, 1]$.
- L'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1, 1]$.
- L'ensemble des fonctions paires.

Exercice 10 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
- L'ensemble des fonctions impaires.
- $\{f \in E, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.

Exercice 11 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions périodiques de période T (T fixé).
- $\{f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.
- $\{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$.

Exercice 12 : Soit

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge}\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E .

Exercice 13 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit F l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui s'écrivent $x \mapsto ax + b$, pour certains réels a et b . Soit enfin $G = \{f \in E \mid f(0) = 0, f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que

$$E = F \oplus G.$$

Exercice de difficulté moyenne : _____

Exercice 1 : Soit \mathcal{C} l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

\mathcal{V} est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de \mathcal{C} .

Montrer que \mathcal{V} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Correction :

- $0 = 0 - 0 \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V} \neq \emptyset$;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$, avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}$.

On a $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$.

Or $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{C}$ (la somme de deux fonctions croissantes est croissante), donc $f + g \in \mathcal{V}$.

- Soient $f \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$.

Si $\lambda \geq 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{V}$ car $\lambda f_1, \lambda f_2 \in \mathcal{C}$.

Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = -\lambda f_2 - (-\lambda f_1) \in \mathcal{V}$ car $-\lambda f_2, -\lambda f_1 \in \mathcal{C}$.

On en déduit que \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Exercice 2 : Soit $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in G$ donc $G \neq \emptyset$;
- Soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a $(\lambda u + \mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} + 2u_n) + \mu(3v_{n+1} + 2v_n) = 3(\lambda u + \mu v)_{n+1} + 2(\lambda u + \mu v)_n$.

Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in G$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Non. Tout d'abord par définition $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, Nous allons trouver un vecteur de \mathbb{R}^4 qui n'est pas dans $\text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0, 0, 0, 1)$.

$u \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α, β, γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α, β, γ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver α, β, γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrer tout \mathbb{R}^4 car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace \mathbb{R}^4 de dimension 4.

Exercice 4 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

Exercice 5 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

On peut montrer $\text{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3, v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersec-

tion. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0, 0, 1, 0) \notin \text{Vect}\{v_1, v_4\} + \text{Vect}\{v_3, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a)/P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$.

La somme est-elle directe ?

Exercice 7 : Soit E un \mathbb{K} -ev, et F, G deux sev de E .

On considère H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G .

Montrer que $F + G = F \oplus H$.

Exercice 8 : Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9 : Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $u = (1, 1, 1)$. On pose :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$;
- $G = \text{vect}(u)$.

1. Écrire G sous la même forme que F .
2. Montrer que F est un sev de E .
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 10 : Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose :

- $A = \left\{ f \in E, \int_0^1 f = 0 \right\}$;
- G l'ensemble des applications constantes de E .

Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Correction : Soit $f \in E$.

$$f = \underbrace{f - \int_0^1 f}_{\in A} + \underbrace{\int_0^1 f}_{\in G}$$

Exercice 11 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose :

- \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires de E ;
- \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires de E .

Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Donner la décomposition de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto (1+x)^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \frac{x}{x^2+x+1}$ sur $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercice 12 : Soient $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Exercice 13 : Soient

- $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,
- $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$,
- $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,

Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 14 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a) | P\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercices plus ardues : _____

Exercice 1 : Soit $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists k \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $0 \in E$ donc $E \neq \emptyset$;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

Par définition, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k_1|x|$ et $|g(x)| \leq k_2|x|$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1|x| + k_2|x| = (k_1 + k_2)|x|$.

On peut donc poser $k = k_1 + k_2 \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |(f+g)(x)| \leq k|x|$, i.e. $(f+g) \in E$.

- Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par définition, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq k|x|$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| k |x|$.

On peut donc poser $k' = |\lambda| k \in \mathbb{R}_+$, et on a $\forall x \in \mathbb{R}, |\lambda f(x)| \leq k' |x|$, i.e. $\lambda f \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un \mathbb{R} -ev.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel, et F, G deux sev de E .

Montrer que $F \cup G$ est un sev de $E \iff (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sev de E .

Montrer que
$$\begin{cases} F + H = G + H \\ F \cap H = G \cap H \\ F \subset G \end{cases} \implies F = G.$$

Exercice 4 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1), v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Correction : Oui. Notons $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$. Pour montrer $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ il faut montrer $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$.

- Montrons $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Soit $u \in F \cap G$, d'une part $u \in F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2$. D'autre part $u \in G = \text{Vect}\{v_4, v_5\}$ donc il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \gamma v_4 + \delta v_5$. On a écrit u de deux façons donc on a l'égalité $\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_4 + \delta v_5$. En écrivant les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela donne

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = \delta \\ \beta = 0 \\ \alpha = \gamma + \delta \end{cases}$$

Cela implique $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et donc $u = (0, 0, 0, 0)$. Ainsi le seul vecteur de $F \cap G$ est le vecteur nul.

- Montrons $F + G = \mathbb{R}^4$. $F + G = \text{Vect}\{v_1, v_2\} + \text{Vect}\{v_4, v_5\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Il faut donc montrer que n'importe quel vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ de \mathbb{R}^4 s'écrit comme une combinaison linéaire de v_1, v_2, v_4, v_5 . Fixons u et cherchons $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Après avoir considéré les vecteurs comme des vecteurs colonnes cela revient à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha = x_0 \\ \delta = y_0 \\ \beta = z_0 \\ \alpha + \gamma + \delta = t_0 \end{cases}$$

Nous étant donné un vecteur $u = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ on a calculé qu'en choisissant $\alpha = x_0$, $\beta = z_0$, $\gamma = t_0 - x_0 - y_0$, $\delta = y_0$ on obtient bien $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 + \delta v_5 = u$. Ainsi tout vecteur est engendré par $F + G$.

Ainsi $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$ et $F + G = \mathbb{R}^4$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

Correction : Analysons d'abord les fonctions de E qui ne sont pas dans F : ce sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ ou $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b$, ($b \in \mathbb{R}^*$) ou les homothéties $x \mapsto ax$, ($a \in \mathbb{R}^*$) n'appartiennent pas à F .

Cela nous donne l'idée de poser

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E .

Soit $f \in F \cap G$, alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.

Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.

En conclusion nous avons montré que $E = F \oplus G$.

Exercice 6 : Soit $E = D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $G = \{f \in E, f'' - 2f' + 5f = 0\}$ et $H = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Vérifier que G et H sont des sev de E .
2. Sans calcul, justifier que G et H sont en somme directe.
3. Prouver que G et H sont des sev supplémentaires de E .

Exercice 7 : Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} et solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$. Soient F et G les ensembles de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et solutions respectivement des équations différentielles $y' = -y$ et $y' = 3y$.

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E .

Exercice 8 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.) : Soient U, V, W des s.e.v. d'un e.v. E , vérifiant (I) : $U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W$.

1. Démontrer que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(II) : (\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w).$$

Exercice 9 (Somme et intersection) : Soit E un K -ev, E_1, \dots, E_n des sev tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$, F un autre sev de E , et $F_i = E_i \cap F$.

1. Montrer que la somme $G = F_1 + \dots + F_n$ est directe.
2. Comparer F et G .

Exercice 10 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $f : E \rightarrow E$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\text{Ker } f$.

2. Mêmes questions avec $g : E \rightarrow E$.
- $$P \mapsto \int_0^x P(t) dt$$