Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application. Montrer que si f est injective, alors :

$$\mathbb{F} \text{ est fini } \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{E}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

Exercice 1 :

1. On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

Correction :

1. $5 \times 4^5 = 5\ 120$
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles 3^{50}
3. une voyelle : $26^4 \times 6$; deux voyelles distinctes $26^3 \times 6 \times 5$.

Exercice 2 : Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = P(1)\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

— $O \in E$ donc $E \neq \emptyset$;

— Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ et de même $(\lambda P + \mu Q)(1) = 0$.

Par conséquent, $\lambda P + \mu Q \in E$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 3 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $x \mapsto ax + b$, pour certains réels a et b. Soit enfin $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E} | f(0) = 0, f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que
$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}.$$

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soit E un ensemble à n éléments. Donner la définition d'un p-arrangement et donner, en le justifiant soigneusement, le nombre de p-arrangements dans un tel ensemble avec $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 :

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec p chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec p chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
3. Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

Correction :

1. $9 \times 10^{p-1}$.
2. 9^p.
3. Le complémentaire est $9 + 9^2 + \cdots + 9^{46} = 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{9-1}$.

   Le pourcentage est donc $1 - 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{8 \times 10^{46}} \approx 99,1\%$.

Exercice 2 : Soit

$$\mathrm{E} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \right\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$.
2. Mêmes questions avec $g : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{P}(t)\, dt \end{array}$.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soit E un ensemble à n éléments. Donner, en le justifiant de deux manières différentes, le nombre de parties dans un tel ensemble.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

Correction : $f : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_n$ est surjective $\iff$ il existe un, et un seul élément de $\mathbb{N}_n$ ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions périodiques de période T (T fixé).
- $\{f \in \mathrm{E}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.
- $\{f \in \mathrm{E}, \forall\, x \in [0, 1], f(x) = 0\}$.

Exercice 3 : [Somme et intersection] Soit E un K-ev, $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ des sev tels que $\mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$, F un autre sev de E, et $\mathrm{F}_i = \mathrm{E}_i \cap \mathrm{F}$.

1. Montrer que la somme $\mathrm{G} = \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n$ est directe.
2. Comparer F et G.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Énoncer puis prouver la propriété de symétrie pour les coefficients binomiaux, les formules du capitaine et de Pascal par des raisonnements combinatoires.

Exercice 1 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes.

Il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction : Une tenue est un triplet $(\mathrm{P}, \mathrm{T}, \mathrm{C})$: il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes.

— «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.

  La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\dfrac{40}{240} = \dfrac{1}{6}$.

— «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements :

  N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par :

  $(\mathrm{N}_1 \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \mathrm{N}_2 \cap \overline{\mathrm{N}_3}) \cup (\overline{\mathrm{N}_1} \cap \overline{\mathrm{N}_2} \cap \mathrm{N}_3)$.

  Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
— L'ensemble des fonctions impaires.
— $\{f \in \mathrm{E}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$.

Exercice 3 : [Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.] Soient $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant (I) : $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \{0\} = (\mathrm{U} + \mathrm{V}) \cap \mathrm{W}$.

1. Démontrer que $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{0\} = \mathrm{U} \cap (\mathrm{V} + \mathrm{W})$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(\mathrm{II}) : (\forall x \in \mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})(\exists!(u, v, w) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W})(x = u + v + w).$$

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Donner quatre exemples usuels d'espaces vectoriels, préciser leurs lois et connaître leurs vecteurs nuls.

Exercice 1 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions bornées sur $[-1, 1]$.
— L'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1, 1]$.
— L'ensemble des fonctions paires.

Exercice 3 : Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$. Soient F et G les ensembles de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions respectivement des équations différentielles $y' = -y$ et $y' = 3y$.

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Montrer que l'intersection de plusieurs sev est un sev et que $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sev contenant X.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble fini E à n éléments.

Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

Correction : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- L'ensemble des fonctions monotones.
- L'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 3 : Soit $E = D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $G = \{f \in E, f'' - 2f' + 5f = 0\}$ et $H = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Vérifier que G et H sont des sev de E.
2. Sans calcul, justifier que G et H sont en somme directe.
3. Prouver que G et H sont des sev supplémentaires de E.