

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux ensembles et  $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$  une application. Montrer que si  $f$  est injective, alors :

$$\mathbb{F} \text{ est fini} \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \text{card}(\mathbb{E}) \leq \text{card}(\mathbb{F}).$$

Donner le  $DL_n(0)$  ainsi que ses 4 premiers termes de  $\text{ch}(x)$ .

**Exercice 1 :** De combien de façons peut-on répartir  $n$  personnes autour d'une table ronde ?

**Exercice 2 :** Soit  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$ .

$E$  est-il un espace vectoriel ?

**Exercice 3 :** Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions croissantes de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

$\mathcal{V}$  est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de  $\mathcal{C}$ .

Montrer que  $\mathcal{V}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de  $p$ -arrangements d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments est égal à  $\frac{n!}{(n-p)!}$ , si  $p \leq n$  et 0 sinon.

Donner le DL $_n(0)$  ainsi que ses 4 premiers termes de  $\cos(x)$ .

**Exercice 1 :** Combien de mains de cinq cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 As et 2 Cœurs ?

**Exercice 2 :** Déterminer lesquels des ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}.$$

**Exercice 3 :** Soit  $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$ .

$G$  est-il un espace vectoriel ?

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de parties d'un ensemble  $\mathbb{E}$  à  $n$  éléments de cardinal  $p$  est  $\binom{n}{p}$ .

Donner le DL <sub>$n$</sub> (0) ainsi que ses 4 premiers termes de sh( $x$ ).

**Exercice 1 :** Calculer pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .

**Exercice 2 :** Déterminer lesquels des ensembles  $E_1$  et  $E_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

**Exercice 3 :** On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Vect $\{v_1, v_2\}$  et Vect $\{v_3\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de parties d'un ensemble à  $n$  éléments est  $2^n$  par deux méthodes.

Donner le DL <sub>$n$</sub> (0) ainsi que ses 4 premiers termes de  $e^x$ .

**Exercice 1 :** Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

**Exercice 2 :** Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\}.$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}.$$

**Exercice 3 :** On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Vect $\{v_1, v_4\}$  et Vect $\{v_3, v_5\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Symétrie, formule du capitaine et de Pascal par des raisonnements combinatoires.

Donner le DL<sub>n</sub>(0) ainsi que ses 4 premiers termes de  $\ln(1+x)$ .

**Exercice 1 :** Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

**Exercice 2 :** Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}.$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\}.$$

**Exercice 3 :** On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Vect $\{v_1, v_3, v_4\}$  et Vect $\{v_2, v_5\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?

Nom : .....

Prénom : .....

## Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Connaître les exemples usuels d'espaces vectoriels, savoir écrire leurs lois et connaître leur vecteur nul.

Donner les 4 premiers termes du DL en 0 de  $\tan(x)$ .

**Exercice 1 :** Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

**Exercice 2 :** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geq 0\}.$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}.$$

**Exercice 3 :** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a) \mid P\}$$

pour  $a \in \mathbb{R}$ .

Montrer que si  $a \neq b$  alors  $E = E_a + E_b$ .

La somme est-elle directe ?

Nom : .....

Prénom : .....

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : L'intersection de sev est un sev et  $\text{vect}(X)$  est le plus petit sev contenant  $X$ .

Donner le DL<sub>n</sub>(0) ainsi que ses 4 premiers termes de  $\frac{1}{1+x}$ .

**Exercice 1 :**

1. On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

**Exercice 2 :** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\}.$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}.$$

**Exercice 3 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev, et  $F, G$  deux sev de  $E$ .

On considère  $H$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $G$ .

Montrer que  $F + G = F \oplus H$ .

Nom : .....

Prénom : .....

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours :  $\text{vect}(X)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de  $X$ .

Donner le DL <sub>$n$</sub> (0) ainsi que ses 4 premiers termes de  $(1+x)^\alpha$ .

**Exercice 1 :**

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec  $p$  chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec  $p$  chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
3. Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

**Exercice 2 :** Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

- L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- L'ensemble des fonctions monotones.
- L'ensemble des fonctions paires ou impaires.

**Exercice 3 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.) :** Soient  $U, V, W$  des s.e.v. d'un e.v.  $E$ , vérifiant (I) :  $U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W$ .

1. Démontrer que  $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$ .
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(II) : (\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w).$$

Nom : .....

Prénom : .....

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soient  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  deux ensembles et  $f : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$  une application. Montrer que si  $f$  est surjective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini} \implies \mathbb{F} \text{ est fini et } \text{card}(\mathbb{F}) \leq \text{card}(\mathbb{E}).$$

Donner le DL<sub>n</sub>(0) ainsi que ses 4 premiers termes de  $\arctan(x)$ .

**Exercice 1 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Exercice 2 :** Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

- L'ensemble des fonctions bornées sur  $[-1, 1]$ .
- L'ensemble des fonctions croissantes sur  $[-1, 1]$ .
- L'ensemble des fonctions paires.

**Exercice 3 :** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit  $f : E \rightarrow E$ .  $f$  est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de  $\text{Ker } f$ .  

$$P \mapsto P'$$
2. Mêmes questions avec  $g : E \rightarrow E$ .  

$$P \mapsto \int_0^x P(t) dt$$