Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application. Montrer que si f est injective, alors :

$$\mathbb{F} \text{ est fini} \implies \mathbb{E} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{E}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{F}).$$

Donner le $\text{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\operatorname{ch}(x)$.

Exercice 1 : De combien de façons peut-on répartir n personnes autour d'une table ronde ?

Correction : $(n-1)!$: la première personne s'assoit où elle veut...

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] | \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)\}$.

E est-il un espace vectoriel ?

Correction :

— $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{E} \neq \emptyset$;

— Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(0) = \lambda\mathrm{P}(0) + \mu\mathrm{Q}(0) = 0$ et de même $(\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q})(1) = 0$.

  Par conséquent, $\lambda\mathrm{P} + \mu\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\mathcal{V}$ est l'ensemble des fonctions qui peuvent s'écrire comme différence de deux éléments de $\mathcal{C}$.

Montrer que $\mathcal{V}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Correction :

- $0 = 0 - 0 \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{V} \neq \emptyset$;
- Soient $f, g \in \mathcal{V}$.

  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$, avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}$.

  On a $f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$.

  Or $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \in \mathcal{C}$ (la somme de deux fonctions croissantes est croissante), donc $f + g \in \mathcal{V}$.
- Soient $f \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Par définition, on peut écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$.

  Si $\lambda \geqslant 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = \lambda f_1 - \lambda f_2 \in \mathcal{V}$ car $\lambda f_1, \lambda f_2 \in \mathcal{C}$.

  Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f = \lambda(f_1 - f_2) = -\lambda f_2 - (-\lambda f_1) \in \mathcal{V}$ car $-\lambda f_2, -\lambda f_1 \in \mathcal{C}$.

On en déduit que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de p-arrangements d'un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$, si $p \leqslant n$ et 0 sinon.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\cos(x)$.

Exercice 1 : Combien de mains de cinq cartes extraites d'un jeu de 32 cartes contiennent exactement 2 As et 2 Cœurs ?

Correction :

1. Sans l'as de cœur : $\binom{3}{2}\binom{7}{2}\binom{21}{1} = 1\,323$.
2. Avec l'as de cœur : $\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{2} = 4\,410$.

Au total, $5\,733$ mains.

Exercice 2 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{E}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ 3x - 7y = z\}.$$

$$\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 - z^2 = 0\}.$$

Correction :

1. (a) $(0,0,0) \in \mathrm{E}_1$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_1. On a donc $3x - 7y = z$ et $3x' - 7y' = z'$. Donc $3(x+x') - 7(y+y') = (z+z')$, d'où $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_1.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathrm{E}_1$. Alors la relation $3x - 7y = z$ implique que $3(\lambda x) - 7(\lambda y) = \lambda z$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1.
2. $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent à E_2 mais $(1,0,-1) + (1,0,1) = (2,0,0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{G} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

G est-il un espace vectoriel ?

Correction :

- $\mathrm{O} \in \mathrm{E}$ donc $\mathrm{G} \neq \emptyset$;
- Soient $u, v \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  On a $(\lambda u+\mu v)_{n+2} = \lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1}+2u_n)+\mu(3v_{n+1}+2v_n) = 3(\lambda u+\mu v)_{n+1}+2(\lambda u+\mu v)_n$.

  Par conséquent, $\lambda u + \mu v \in \mathrm{G}$.

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-ev.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de parties d'un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments de cardinal p est $\binom{n}{p}$.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 1 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Correction : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 2 : Déterminer lesquels des ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{E}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}.$$

$$\mathrm{E}_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}.$$

Correction :

1. E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :
   (a) $(0,0,0) \in \mathrm{E}_3$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_3. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_3.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathrm{E}_3$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_3.
2. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1,0,0)+(0,0,1) = (1,0,1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Tout d'abord par définition Vect$\{v_1, v_2\}$ + Vect$\{v_3\}$ = Vect$\{v_1, v_2, v_3\}$, Nous allons trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans Vect$\{v_1, v_2\}$ + Vect$\{v_3\}$. Il faut tâtonner un peu pour le choix, par exemple faisons le calcul avec $u = (0,0,0,1)$.

$u \in$ Vect$\{v_1, v_2, v_3\}$ si et seulement si il existe des réels α, β, γ tels que $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Si l'on écrit les vecteurs verticalement, on cherche donc α, β, γ tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à trouver α, β, γ vérifiant le système linéaire :

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 \\ 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 \\ 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

Il n'y a clairement aucune solution à ce système (les trois premières lignes impliquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et cela rentre alors en contradiction avec la quatrième).

Un autre type de raisonnement, beaucoup plus rapide, est de dire que ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs en effet 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n par deux méthodes.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de e^x.

Exercice 1 : Combien y a-t-il de nombres de cinq chiffres (écrits en base 10) où comportant un chiffre répété et un seul ?

Correction :

— Le chiffre répété est le premier :

9 choix de chiffres ; 4 choix pour la position de la répétition ; $9 \times 8 \times 7$ pour les autres.

— Le chiffre répété n'est pas le premier :

9 choix pour le chiffre en première place ;

$\binom{4}{2}$ choix de positions pour la répétition, et 9 choix de chiffres (différents du premier) ;

8×7 pour les autres.

Au total : $9 \times 4 \times 9 \times 8 \times 7 + 9 \times \left[\binom{4}{2} \times 9\right] \times 8 \times 7 = 18144 + 27216 = 45360.$

Exercice 2 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \text{ et } x + 3az = 0\right\}.$$

$$\mathrm{E}_2 = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\right\}.$$

Correction :

1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin \mathrm{E}_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Il y a bien quatre vecteurs mais il existe des relations entre eux.

On peut montrer $\mathsf{Vect}\{v_1, v_4\}$ et $\mathsf{Vect}\{v_3, v_5\}$ ne sont pas supplémentaires de deux façons. Première méthode : leur intersection est non nulle, par exemple $v_4 = v_5 - v_3$ est dans l'intersection. Deuxième méthode : les deux espaces n'engendrent pas tout, en effet il est facile de voir que $(0,0,1,0) \notin \mathsf{Vect}\{v_1, v_4\} + \mathsf{Vect}\{v_3, v_5\} = \mathsf{Vect}\{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Symétrie, formule du capitaine et de Pascal par des raisonnements combinatoires.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\ln(1+x)$.

Exercice 1 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 2 : Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$\mathrm{E}_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}.$$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\right\}.$$

Correction :

1. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
2. E_4 : non, en fait E_4 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2, 0) \in \mathrm{E}_4$ mais $-(2, 0) = (-2, 0) \notin \mathrm{E}_4$.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Correction : Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Connaître les exemples usuels d'espaces vectoriels, savoir écrire leurs lois et connaître leur vecteur nul.

Donner les 4 premiers termes du DL en 0 de $\tan(x)$.

Exercice 1 : Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction : Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Exercice 2 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z \geqslant 0\right\}.$$

$$\mathrm{F}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\right\}.$$

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit

$$\mathrm{E}_a = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}; (\mathrm{X} - a)/\mathrm{P}\}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $a \neq b$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{E}_a + \mathrm{E}_b$.

La somme est-elle directe ?

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : L'intersection de sev est un sev et $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$ est le plus petit sev contenant X.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 1 :

1. On dispose de 5 couleurs pour colorier un drapeau constitué de 6 bandes, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur. Dénombrer les coloriages possibles.
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
3. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

Correction :

1. $5 \times 4^5 = 5\ 120$
2. On colorie chaque carreau d'un quadrillage rectangulaire de 50 carreaux soit en vert, soit en jaune, soit en rouge. Combien y a-t-il de coloriages possibles 3^{50}
3. une voyelle : $26^4 \times 6$; deux voyelles distinctes $26^3 \times 6 \times 5$.

Exercice 2 : Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 3z = 1\right\}.$$

$$\mathrm{F}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\right\}.$$

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et F, G deux sev de E.

On considère H un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans G.

Montrer que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$.

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $(1+x)^\alpha$.

Exercice 1 :

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant (en écriture décimale) avec p chiffres ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels de s'écrivant avec p chiffres ne comportant pas de 0 dans leur écriture ?
3. Quel est le pourcentage de nombres s'écrivant avec 46 chiffres ou moins, et qui comportent le chiffre 0 dans leur écriture.

Correction :

1. $9 \times 10^{p-1}$.
2. 9^p.
3. Le complémentaire est $9 + 9^2 + \cdots + 9^{46} = 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{9-1}$.

   Le pourcentage est donc $1 - 9 \times \dfrac{9^{46}-1}{8 \times 10^{46}} \approx 99,1\%$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
— L'ensemble des fonctions monotones.
— L'ensemble des fonctions paires ou impaires.

Exercice 3 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.) : Soient $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant (I) : $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \{0\} = (\mathrm{U}+\mathrm{V}) \cap \mathrm{W}$.

1. Démontrer que $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{0\} = \mathrm{U} \cap (\mathrm{V}+\mathrm{W})$.
2. Montrer que (I) équivaut à

$$(\mathrm{II}) : (\forall x \in \mathrm{U}+\mathrm{V}+\mathrm{W})(\exists!(u, v, w) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \times \mathrm{W})(x = u+v+w).$$

Dénombrements et espaces vectoriels

Question de cours : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles et $f : \mathbb{E} \longmapsto \mathbb{F}$ une application. Montrer que si f est surjective, alors :

$$\mathbb{E} \text{ est fini } \implies \mathbb{F} \text{ est fini et } \operatorname{card}(\mathbb{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{E}).$$

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ ainsi que ses 4 premiers termes de $\arctan(x)$.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

Correction : $f : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_n$ est surjective $\iff$ il existe un, et un seul élément de $\mathbb{N}_n$ ayant deux antécédents, les autres en ayant exactement un.

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

— L'ensemble des fonctions bornées sur $[-1, 1]$.
— L'ensemble des fonctions croissantes sur $[-1, 1]$.
— L'ensemble des fonctions paires.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$.
2. Mêmes questions avec $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{P}(t)\, dt \end{array}$.