Chapitre

XXIV Dimension finie

Un mathématicien et un ingénieur assistent à une conférence sur les processus physiques intervenant dans les espaces de dimension 9. Le mathématicien est assis et apprécie beaucoup la conférence, pendant que l'ingénieur fronce les sourcils et semble complètement embrouillé.

À la fin, l'ingénieur demande au matheux :

« Comment fais-tu pour comprendre tout cela ? »

« C'est simple ! D'abord tu visualises le processus en dimension n, et ensuite il suffit de prendre $n = 9$. »

Ce deuxième chapitre consacré aux espaces vectoriels n'est en fait qu'une sorte de complément au premier, visant à définir rigoureusement la notion de dimension déjà évoquée dans le précédent chapitre, et à donner de nouvelles méthodes permettant d'alléger les calculs et démonstrations classiques en algèbre linéaire.

Peu de notions nouvelles en vue, si ce n'est celle de *rang* qui est centrale en algèbre linéaire en dimension finie. Notion que nous approfondirons encore au chapitre suivant.

CONTENU

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Familles finies de vecteurs

I.1 Indépendance linéaire

Définition/Théorème 1 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

— On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *liée* si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}. \tag{$\mathbb{L}$iée}$$

— On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *libre* si elle n'est pas liée *i.e.* si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0 \right). \tag{$\mathbb{L}$ibre}$$

On dit alors que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *linéairement indépendante.*

Remarque : Une famille contenant le vecteur nul est liée et on convient que toute famille à zéro éléments est libre.

Avant d'aller plus avant et pour que ce soit bien clair revenons sur l'affirmation logique implicite contenue dans la définition (1) à savoir $\rceil(\mathbb{L}\text{iée})=(\mathbb{L}\text{ibre})$:

Notons pour cela $\mathcal{P} : (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ et $\mathcal{Q} : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}}$.

La proposition ($\mathbb{L}$iée) se réécrit alors :

$$(\mathbb{L}\text{iée}) : \exists(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \rceil\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q},$$

dont la proposition contraire s'écrit :

$$\begin{aligned} \rceil(\mathbb{L}\text{iée}) \iff (\mathbb{L}\text{ibre}) : \forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ &\rceil\left(\rceil\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}\right) \\ &\left(\mathcal{P} \vee \rceil\mathcal{Q}\right) \\ &\left(\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}\right) \\ &\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Exemples 1 :

— Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1 ; \mathrm{i})$ est libre, puisque pour tout $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a + \mathrm{i}\, b = 0 \implies a = b = 0.$$

En revanche, dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1 ; \mathrm{i})$ est liée puisque

$$i.1 + (-1).i = 0.$$

— Dans $\mathbb{K}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1,\ X,\ X^2,\ \dots,\ X^n)$ est une famille libre.

En effet, un polynôme est nul si, et seulement si tous ses coefficients le sont ce qui se traduit par :

$$\forall\,(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k = 0_{\mathbb{K}[X]} \implies \forall\, k \in [\![0, n]\!],\quad \lambda_k = 0.$$

Exercice 1 : Montrer que la famille $(\cos\,;\sin)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Correction : Considérons une combinaison linéaire nulle de $\cos$ et $\sin$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *i.e.* soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

Égalité vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ qui nous donnent $\lambda = \mu = 0$.

La famille $(\cos\,;\sin)$ est donc libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Dans la même idée que l'assertion précédente, l'implication ($\mathbb{L}$ibre) de la définition (1) en cache une autre, promesse de propriétés à venir :

Corollaire 0.1 :
Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E.

Pour tous $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \implies \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \lambda_k = \mu_k.$$

Preuve : Immédiatement,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \iff \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) x_k = 0 \implies \forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \lambda_k = \mu_k.$$

Vous devez vous douter à ce stade que la liberté d'une famille donnera l'unicité d'une certaine écriture ou d'une certaine décomposition.

Corollaire 0.2 (Important) :
Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre si, et seulement si tout vecteur de $\operatorname{vect}(\{x_1, \cdots, x_n\})$ se décompose **de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$.

Preuve :

$(\Rightarrow)$ **:** C'est exactement le corollaire (0.1) .

$(\Leftarrow)$ **:** Supposons que la décomposition est unique, et montrons que $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Considérons alors une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille *i.e.* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

Ce qui s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i$.

Par unicité de la décomposition, $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

La famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est libre.

Exemples 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-ev E.

— Si $n = 0$: la famille vide est libre (convention).

— Si $n = 1$: la famille (x_1) est libre $\iff$ $x_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$.

— Si $n = 2$: la famille (x_1, x_2) est libre $\iff$ x_1 et x_2 sont non colinéaires.

Preuve :

- Si x_1 et x_2 sont colinéaires (ou nuls), on peut écrire $x_1 = \lambda x_2$ *i.e.* $1x_1 - \lambda x_2 = 0$: la famille est liée.
- Réciproquement, si la famille (x_1, x_2) est liée, on peut écrire $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $x_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2$ et les vecteurs sont colinéaires. Idem si $\lambda_2 \neq 0$ et on ne peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par hypothèse.

Exercice 2 : Soit $x_1 = (1\,;1\,;1)$, $x_2 = (1\,;2\,;-1)$ et $x_3 = (-1\,;1\,;1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $(x_1\,; x_2\,; x_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Correction : Soit λ_1, λ_2 et λ_3 des scalaires tels que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0. \tag{XXIV.1}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

La relation (XXIV.1) est équivalente au système homogène de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \tag{XXIV.2}$$

La matrice de ce système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls et qui est donc inversible.

Le système (XXIV.2) n'admet donc comme unique solution que le solution nulle. La famille est donc libre.

Plus généralement,

Proposition 1 :
Une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Ceci s'applique, en particulier, à une famille dont deux vecteurs sont égaux et, par conséquent, les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement deux à deux distincts.

Preuve : Considérons une famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E.

$(\Leftarrow)$ **:** Supposons, par exemple, que $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k - x_n = 0_E$ avec $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, -1) \neq (0, \cdots, 0)$

La famille est donc liée.

$(\Rightarrow)$ **:** Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$.

L'un des λ_i au moins est non nul, disons $\lambda_i \neq 0$. Alors, on peut écrire $x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k$ et le résultat.

Exercice 3 : Soient $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (3\,;2\,;1)$ et $w = (5\,;6\,;7)$.

Montrer que (u, v, w) est liée.

Correction : $w = 2u + v$.

Corollaire 1.1 (Application) :
Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E et $x \in E$.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) \text{ est liée} \iff x \in \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Exemple 3 : On déduit également de la proposition précédente qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires est libre.

En effet, si $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ était liée, alors, par exemple, e_1 appartiendrait à $\mathrm{vect}\,(e_2\,;e_3)$ et les trois vecteurs seraient coplanaires.

ATTENTION

Une famille de trois vecteurs $(e_1\,;e_2\,;e_3)$ deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre.

Prendre par exemple $\{\,(1\,;-1\,;0)\,;\,(0\,;1\,;-1)\,,\,(-1\,;0\,;1)\,\}$.

Grâce à la contraposée de l'équivalence précédente, on peut ainsi agrandir une famille libre en lui adjoignant des vecteurs de E qui sont linéairement indépendants des vecteurs de la famille.

De la même manière, la contraposée de la proposition (1) s'écrit aussi :

Corollaire 1.2 :
Une famille est libre si, et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Suivent deux propriétés simples mais importantes :

Proposition 2 :
1. Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
2. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Preuve :
1. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de E et L une sous-famille de $(x_1,\dots,x_n)$. Quitte à réarranger les termes, on peut supposer que $\mathrm{L}=(x_1,\dots,x_p)$ avec $p\in[\![1\,;n]\!]$.

   Quitte à compléter par des scalaires nuls, toute combinaison linéaire nulle $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x_k=0$ des éléments de L peut se voir comme une combinaison linéaire nulle $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0$ des éléments de $(x_1,\dots,x_n)$.

   La liberté de cette dernière nous donne le résultat escompté : $\forall\,k\in[\![1\,;p]\!]$, $\lambda_k=0$ *i.e.* L est libre.
2. C'est la contraposée du résultat précédent.

I.2 Un exemple important

Définition 2 : Une famille $(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_n)$ de polynômes est dite *de degrés échelonnés* si

$$\deg(\mathrm{P}_0)<\cdots<\deg(\mathrm{P}_n).$$

De telles familles seront fréquentes et la majorité des familles de polynômes que vous rencontrerez à partir de maintenant le seront probablement.

Proposition 3 :
Une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et de degrés échelonnés est libre.

C'est un type de famille qui nous sera grandement utile et que nous retrouverons souvent en deuxième année notamment.

Preuve : On démontre ce résultat par récurrence sur n, le nombre polynômes de la famille où $n \geqslant 1$.

Pour $n = 1$ et P_1 un polynôme non nul, il est relativement évident que :

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{K},\ \lambda_1 P_1 = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

Pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, supposons alors que toute famille de $n-1$ polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre et considérons une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ de n polynômes non nuls de degrés échelonnés ainsi qu'une combinaisons linéaires nulles de ceux-ci *i.e.*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \iff \lambda_n P_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k.$$

En considérant les degrés, $\deg(\lambda_n P_n) = \deg\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k\right) < \deg(P_n)$ qui ne peut être vraie que si $\lambda_n = 0$.

L'égalité $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$ se réduit alors à $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k = 0$, combinaison linéaire nulle d'éléments d'une famille de $n-1$ polynômes non nuls et de degrés échelonnés.

Celle-ci est libre par hypothèse de récurrence ce qui implique $\forall i \in [\![1\,; n-1]\!],\ \lambda_i = 0$.

En conclusion, $\forall i \in [\![1\,; n]\!]$, $\lambda_i = 0$, la famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est donc libre et la propriété héréditaire.

Initialisée pour $n = 1$, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple 4 : $\left(1,\ X+1,\ X^3 - X\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Corollaire 3.1 (Important) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\left(1,\ X,\ X^2,\ \dots,\ X^n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ (et $\mathbb{K}_n[X]$).
- $\forall a \in \mathbb{K}$, $\left(1,\ X-a,\ (X-a)^2,\ \dots,\ (X-a)^n\right)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ (et $\mathbb{K}_n[X]$).

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la famille $\mathcal{A}_n = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,

avec $a_1 = (1, 1, 0, \cdots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $a_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, 1)$ et $a_n = (1, 0, \cdots, 0, 1)$.

Pour quelles valeurs de n la famille $\mathcal{A}_n$ est-elle libre ?

Correction : Considérons une combinaison linéaire nulle de a_k pour $k \in [\![1\,;n]\!]$ *i.e.* considérons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \iff \left\{\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_1 & + & & & & & & & \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & & & = & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & = & 0 \\ & & & & & & \alpha_{n-2} & + & \alpha_{n-1} & = & 0 \\ & & & & & & & & \alpha_{n-1} + \alpha_n & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_{i+1} \leftarrow \mathrm{L}_{i+1} - \mathrm{L}_i}{\iff} \left\{\begin{array}{cccccccccc} \alpha_1 & + & & & & & & \alpha_n & = & 0 \\ & & \alpha_2 & & & & - & \alpha_n & = & 0 \\ & & & \alpha_3 & & & + & \alpha_n & = & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & \alpha_{n-1} & + & (-1)^{n-1}\alpha_n & = & 0 \\ & & & & & & + & (1-(-1)^n)\alpha_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système linéaire homogène admet le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ comme solution. C'est la seule si, et seulement si il est de rang n *i.e.* si, et seulement si $1 - (-1)^n \neq 0$.

La famille $\mathcal{A}_n$ est donc libre si, et seulement si n est impair. [1]

I.3 Familles génératrices

Définition 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{E}^n$.

On dit que la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est *génératrice* (de E) lorsque tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_n$ ou, de manière équivalente,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ est génératrice de E} &\iff \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathrm{E}. \\ &\iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ /\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Pour toute famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'éléments de E, on a TOUJOURS

$$\operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset \mathrm{E}.$$

C'est l'inclusion réciproque qui est intéressante.

En particulier, remarquez déjà que toute sur-famille d'une famille génératrice de E est aussi génératrice.

[1]. En supposant $carac(\mathbb{K}) \neq 2$.

Exemples 5 :

— $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

D'une manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ puisque tout polynôme P de degré au plus n s'écrit sous la forme $P = \sum_{i=1}^{n} p_i X^i$ où $(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

— $(1, X, X^2, X+1, X^2+X+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle n'est pas libre.

— 1. La famille $(1\,;\,i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  2. La famille (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  3. La famille $(1\,;\,j)$ engendre aussi le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{C}$.

  En effet, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \iff i = \frac{1}{\sqrt{3}}.1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.j$ et on a aussi facilement $1 = 1.1 + 0.j$.

  Tout nombre complexe, combinaison linéaire de 1 et i, est donc également combinaison linéaire de 1 et j *i.e.* $(1\,;\,j)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

  Remarque : On peut également montrer que $(i\,;\,j)$ engendre également le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 5 : Montrer que la famille $((1\,;1\,;0), (0\,;1\,;1), (1\,;0\,;1), (0\,;0\,;1))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

Est-elle libre ?

Correction : Soit $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$, alors on a, par exemple :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\,(1\,;0\,;1) + (z-y+x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $((1\,;1\,;0), (0\,;1\,;1), (1\,;0\,;1), (0\,;0\,;1))$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer qu'elle n'est pas libre, deux méthodes :

1. Soit trouver une autre décomposition comme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit montrer directement que la famille est liée en écrivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

combinaison linéaire nulle des quatre vecteurs dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Exemples 6 (Usuels) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ où

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ e_i = (0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, \underset{i^{\text{ème}}\ \text{composante}}{\underset{\uparrow}{1}},\, 0).$$

Preuve : Tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *i.e.* tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, ..., e_n.

Ainsi $\mathbb{K}^n = \operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ *i.e.* $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$.

2. De la même manière, tout polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ *i.e.* comme combinaison linéaire des polynômes 1, X, ..., X^n.

   Il en résulte que $\mathbb{K}_n[X] = \operatorname{vect}(1, X, \dots, X^n)$ *i.e.* $(1, X, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Mieux, d'après la formule de Taylor, la famille $\left(1,\ X-a,\ (X-a)^2,\ \dots,\ (X-a)^n\right)$ est également une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 4 :
Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille génératrice d'éléments de E.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \text{ est génératrice de E} \iff x_n \in \operatorname{vect}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\,.$$

On peut ainsi réduire une famille génératrice en lui retirant les vecteurs qui sont linéairement dépendants des autres vecteurs de la famille.

Preuve :

$(\Rightarrow)$ **:** Si $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est génératrice, tous les vecteurs de E, en particulier x_n, sont des combinaisons linéaires de $x_1, \cdots, x_{n-1}$.

$(\Leftarrow)$ **:** Supposons que x_n est une combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_{n-1}$: $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$.

Montrons que $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est génératrice.

Soit $u \in E$. Il suffit d'écrire u en fonction de $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Comme $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille génératrice, on peut écrire :

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k\right) + \alpha_n x_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k\right) + \alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_n \lambda_k) x_k.$$

La famille $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est bien génératrice.

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, on considère le sev $\mathrm{F} = \{ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-2z=0 \}$.

Déterminer une famille génératrice de F.

Correction : Il suffit de résoudre un système linéaire homogène :

$$\begin{aligned}(x\,;y\,;z)\in \mathrm{F} &\iff \{x+y-2z=0\\ &\iff \begin{cases} x & = y-2z \\ \quad y & = y \\ \qquad z = & \quad z \end{cases}\\ &\iff (x\,;y\,;z) \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc génératrice de F.

I.4 Bases

Définition 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n\in\mathbb{N}^\star$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n) \in \mathrm{E}^n$.

On dit que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une *base* de E si, et seulement si elle est *libre* et *génératrice*.

On convient que $\emptyset$ est une base de $\{0\}$.

Exemple 7 :

1. Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, toute famille constituée de deux vecteurs non colinéaires est une base.

   Classiquement, $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est une base de $\vec{\mathcal{E}}_2$ mais aussi $(\vec{u}\,;\vec{v})$ où $\vec{u}\,(1\,;2)$ et $\vec{v}\,(1\,;0)$ par exemple.
2. $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ admet pour base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ mais aussi $(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2, 1+\mathrm{X}, 2)$: les bases ne sont donc pas uniques.

   La base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est appelée *base canonique* de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

   Plus généralement, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ et $(1, \mathrm{X}-a, \dots, (\mathrm{X}-a)^n)$, $a\in\mathbb{K}$ sont des bases de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
3. $\mathbb{R}^3$ admet pour base $\mathcal{B}_1 = (u, v, w)$, avec $u=(1,2,3)$, $v=(0,1,2)$ et $w=(0,0,1)$, mais aussi $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. $\mathcal{B}_0$ est la *base canonique* de $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathbb{R}^n$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, avec $e_k = (\delta_{1,k}, \delta_{2,k} \cdots, \delta_{n,k})$.

   $$\text{où}\quad \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } i\neq k \\ 1 \text{ si } i=k \end{cases} \qquad \text{appelé Symbole de Kronecker.}$$

   — $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$: la famille est génératrice ;

CHAPITRE XXIV. DIMENSION FINIE

— $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = 0 \implies (x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \iff \forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ x_i = 0$: la famille est libre.

5. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet pour *base canonique* $\mathcal{B} = (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \cdots, \mathrm{E}_{n,p},)$ où :

$$\mathrm{E}_{k,l} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow l & & & \end{array} & \end{array}$$

$$\forall\ (k\,;l) \in \left(\,[\![1\,;n]\!]\,\right)^2,\ \mathrm{E}_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Les matrices $\mathrm{E}_{k,\ell}$, où l'unique coefficient non nul valant 1 est situé sur la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne sont appelées *matrices élémentaires.*

Pour prouver qu'une famille est une base, on doit théoriquement prouver qu'elle est à la fois libre et génératrice.

En fait, on peut se contenter d'un seul calcul, en prouvant que la famille est génératrice et que la décomposition obtenue est toujours unique. Cela reviendra, en général à montrer que la solution d'un certain système linéaire est toujours unique.

Théorème 5 :
Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) \in \mathrm{E}^n$.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de e_1, e_2, ..., e_n.

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n) \text{ est une base de E} \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \exists\,!(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ /\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent *les composantes* ou *les coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

ATTENTION

Les coordonnées d'un vecteur dépendent donc de la base $\mathcal{B}$ choisie. Lorsqu'on voudra préciser celle-ci on notera, par exemple,

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Preuve : L'existence d'une décomposition équivaut à dire que $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

L'unicité équivaut à la liberté de $\mathcal{B}$.

Exemple 8 :

1. Dans $\vec{\mathcal{E}}_3$, si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base (vecteurs non coplanaires), tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{\mathcal{E}}_3$ peut s'écrire sous la forme :
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$
$(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ sur $\mathcal{B}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x\,;y\,;z)$ s'écrit $xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

$(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de (x, y, z) sur la base canonique !

3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $(1, 5, 2)$ sont les coordonnées de $1 + 5X + 2X^2$ sur la base canonique $(1, X, X^2)$.
4. L'espace $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-ev : $\mathcal{B} = (1, i)$ est alors une base de ce $\mathbb{R}$-ev :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exists!\,(a\,;b) \in \mathbb{R}^2\,/\,z = a.1 + b.\mathrm{i} = a + b\,\mathrm{i}\,.$$

En tant que $\mathbb{C}$-ev, l'espace $\mathbb{C}$ admet $\mathcal{B} = (1)$ pour base :

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ z = z.1 \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 7 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, on considère $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2)$ la base canonique où $e_1 = (1\,;0)$ et $e_2 = (0\,;1)$.

1. Montrer que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1\,;\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1\,;1)_{\mathcal{B}}$ et $\varepsilon_2 = (-1\,;1)_{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u = (3\,;7)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes du vecteur u dans la base $\mathcal{C}$.

Correction :

1. Il est clair que $e_1 = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ et $e_2 = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ donc $\mathcal{C}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. Famille à deux éléments dans un espace de dimension 2, elle est donc également libre et en forme une base.

   Commentaires : *Il n'était pas trop dur non plus de voir que les deux vecteurs étaient non colinéaires donc libres.*

2. Si on ne voit pas la décomposition, la méthode est de résoudre le système linéaire $u = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$ en les inconnues x, y Comme $\mathcal{C}$ est une base, on sait qu'il admet un unique couple solution :

$$\begin{cases} 3 &= x - y \\ 7 &= x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 5 \\ y &= 2. \end{cases}$$

   Donc $u = 5\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$.

II/ Dimension d'un espace vectoriel

II.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 5 (Fondamentale) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

On dit que E *est de dimension finie* lorsque E admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie.*

Exemples 9 :

- L'ensemble des vecteurs géométriques du plan et de l'espace sont de dimension finie.
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie engendré par la base canonique qui compte n vecteurs.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie engendré par $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie engendré par les matrices élémentaires $E_{k,l}$.
- $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pas plus que $Pol(\mathbb{R})$.

  En effet, une famille finie de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ne peut engendrer $\mathbb{K}[X]$, car si on note $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \cdots, \deg P_n,)$, tout polynôme de vect $(P_1, P_2, \cdots, P_n,)$ est de degré $\leqslant d$.
- D'une manière générale, les espaces de fonctions $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, ..., $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ qui contiennent $Pol(\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

La définition étant donnée, une famille génératrice permettant de décomposer tout élément de E, il est alors légitime de se poser la question de l'unicité d'une telle décomposition. Autrement dit, de la liberté d'une telle famille ou encore de l'existence d'une famille génératrice et libre soit, enfin, de l'existence d'une base de E.

Le théorème suivant répond à cette première question :

Théorème 6 (Théorème de la base extraite) :
De toute famille génératrice *finie* d'un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$, on peut extraire une base.

Preuve : Soit $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice finie de E.

Notons :
$$A = \{\text{card}(\mathcal{F}) \;/\; \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est génératrice de E}\}.$$
La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $\text{card}(\mathcal{G})$). Elle admet donc un plus petit élément p.

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille de cardinal p contenue dans $\mathcal{G}$ et génératrice de E. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$.

Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base de E.

Elle est génératrice par définition. Montrons qu'elle est libre.

Par l'absurde, supposons $(e_1, \dots, e_p)$ liée *i.e.* l'un des vecteurs des e_1, ..., e_p, disons e_p (quitte à les réordonner) est combinaison linéaire des autres.

Ainsi $e_p \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

D'après la proposition (4) , la famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est génératrice de E donc $p - 1 \in A$ ce qui contredit la définition de p.

Ainsi, $\mathcal{F}_p$ est libre et génératrice de E. C'en est donc une base.

Comme conséquence, on a :

Corollaire 6.1 (Existence de bases dans un espace vectoriel de dimension finie) :
Tout $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie* admet une base (finie).

Preuve : E est de dimension finie. Il existe donc une famille génératrice finie $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$.

On lui applique le théorème de la base extraite, et on obtient une base de E.

Le théorème (6) permet donc d'obtenir une base de E à partir d'une famille génératrice. Peut-il en être de même à partir d'une famille libre seulement ?

Théorème 7 (Théorème de la base incomplète) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie.*

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Preuve : Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$.

Notons :

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{card}\,(\mathcal{F})\ /\ \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ est libre}\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide car contient $\mathrm{card}\,(\mathcal{L})$ et est majorée par $\mathrm{card}\,(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})$.

Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{F}_p$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_p \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.

Notons $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$. Montrons que $\mathcal{F}_p$ est une base.

On sait par définition qu'elle est libre. Reste donc à montrer qu'elle est génératrice.

Pour cela, on va montrer que $\mathcal{G} \subset \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_p)$.

Supposons le contraire. Il existe alors un certain $x \in \mathcal{G}$ avec $x \notin \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_p)$.

D'après le corollaire (1.1) , la famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est alors libre, elle contient $\mathcal{L}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ (puisque $x \in \mathcal{G}$).

Ainsi, $p + 1 \in \mathrm{A}$ ce qui est contredit la définition de p.

Donc, $\mathcal{G} \in \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{vect}\,(\mathcal{F}_p)$ et $\mathcal{F}_p = (e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E. Comme elle est libre, c'en est bien une base.

À l'issue de la preuve, on peut être un peu plus explicite :

Corollaire 7.1 :
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E à l'aide d'éléments d'une famille génératrice de E.

II.2 Cardinal des bases en dimension finie

À ce stade, nous sommes donc capables de construire des bases d'un espace de dimension finie à partir d'une famille génératrice ou d'une famille libre. Reste à savoir si ce sont les mêmes ou du moins si elles ont le même nombre d'éléments. Sans ça, point de dimension unique !

Lemme 1 :
Si une famille de n vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ engendre une famille de $n+1$ vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$, alors la seconde est liée.

Preuve : Par récurrence sur n :

— Si $n = 1$. Supposons que (e_1) engendre $\operatorname{vect}(u_1, u_2)$.

Alors on peut écrire $u_1 = \lambda_1 e_1$ et $u_2 = \lambda_2 e_1$. On a alors $\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2 = 0$.

  — Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, alors $u_1 = u_2 = 0$ et donc la famille (u_1, u_2) est liée.
  — Sinon $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$. Comme $\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2 = 0$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$: la famille (u_1, u_2) est liée.

— Soit $n - 1 \geqslant 1$.

Supposons que tout famille de n vecteurs engendrée par une famille de $n-1$ vecteurs soit liée.

Considérons alors une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$ engendrée par $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.

Écrivons alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} u_1 & = & \lambda_{1,1}e_1 & + & \lambda_{1,2}e_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1,n}e_n \\ u_2 & = & \lambda_{2,1}e_1 & + & \lambda_{2,2}e_2 & + & \cdots & + & \lambda_{2,n}e_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ u_{n+1} & = & \lambda_{n+1,1}e_1 & + & \lambda_{n+1,2}e_2 & + & \cdots & + & \lambda_{n+1,n}e_n \end{array}\right.$$

  — Si $\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad \lambda_{k,n} = 0$, alors $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ engendrée par $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$.

  Par hypothèse de récurrence $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est liée, et a fortiori $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$ est liée.
  — Supposons que l'un des $\lambda_{k,n}$ soit non nul.

  Quitte à renommer, posons $\lambda_{n+1,n} \neq 0$.

  Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $u'_k = u_k - \dfrac{\lambda_{k,n}}{\lambda_{n+1,n}} u_{n+1}$.

CHAPITRE XXIV. DIMENSION FINIE

Par construction, les vecteurs $u'_1, u'_2, \cdots, u'_n$ sont engendrés par $(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$.

Par hypothèse de récurrence, la famille est liée.

On peut donc écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k u'_k = 0$ avec au moins un μ_k non nul.

On obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \lambda_{k,n}}{\lambda_{n+1,n}} u_{n+1} = 0$. Donc la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$ est liée.

Corollaire 7.2 :
Si E admet une famille génératrice $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ finie, alors toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n.

En particulier, toute base est de cardinal inférieur ou égal à n.

Preuve : Dans E engendré par $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, considérons une famille $\mathcal{F}$ d'au moins $n+1$ éléments. On peut en extraire une sous-famille $\mathcal{F}'$ d'exactement $n+1$ éléments. Cette famille est engendrée par $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ (qui est génératrice), donc $\mathcal{F}'$ est liée, et a fortiori, $\mathcal{F}$ est liée.

Par contraposition, si une famille est libre, elle comporte au maximum n éléments.

Il ne peut donc exister de familles libres de cardinal strictement supérieur à celui d'une famille génératrice.

Théorème 8 :
Dans un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie*, toutes les bases ont le *même* nombre d'éléments.

Preuve : On considère deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E.

$\mathcal{B}_1$ engendre E et $\mathcal{B}_2$ est libre, donc $\operatorname{card}(\mathcal{B}_1) \geqslant \operatorname{card}(\mathcal{B}_2)$.

Symétriquement, $\operatorname{card}(\mathcal{B}_2) \geqslant \operatorname{card}(\mathcal{B}_1)$.

D'où $\operatorname{card}(\mathcal{B}_1) = \operatorname{card}(\mathcal{B}_2)$.

Définition 6 (Dimension d'un espace vectoriel) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

On appelle *dimension* de E, notée $\dim(\mathrm{E})$, le cardinal de chacune de ses bases.

Remarque : Par convention, $\emptyset$ est une base de $\{0\}$, d'où $\dim(\{0\}) = 0$ et, lorsqu'il y aura ambiguïté sur le corps de base, on n'hésitera pas à noter $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{E})$ au lieu de $\dim(\mathrm{E})$.

Exemples 10 :

- La dimension de l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement de l'espace) est 2 (respectivement 3).
- $\dim \mathbb{K}^n = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ...$(0, 0, \dots, 1)$.
- $\dim \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] = \mathbf{n+1}$ car admet pour base $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$.
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$ car admet pour base $(\mathrm{E}_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant p}}$.
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ dont une base est $(1\,;\,\mathrm{i})$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ dont une base est (1) ou (i).

Exercice 8 : Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{E} = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\right\}$.

Correction : Encore un système linéaire homogène à résoudre :

$$(x\,;y\,;z) \in \mathrm{E} \iff \begin{cases} x + \ \ y + z = 0 \\ x - 3y \qquad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 3y \\ y & = y \\ z & = -4y \end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, non nul, forme donc une base de E qui est, en conséquence, de dimension 1. C'est une droite vectorielle

Proposition 9 (Produit cartésien d'espaces de dimension finie) :
Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est de dimension finie, et :

$$\dim(\mathrm{E} \times \mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E}) + \dim(\mathrm{F}).$$

Preuve : Considérons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $(f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

Tout élément de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est un couple $(x\,;y)$ où $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$ tel que :

$$(x\,;y) = \left(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p\,; \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q\right)$$

D'après les lois produits sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$,

$$= \lambda_1 (e_1\,;0) + \dots + \lambda_p (e_p\,;0) + \mu_1 (0\,;f_1) + \dots + \mu_q (0\,;f_q).$$

La famille $\mathcal{B} = \Big((e_1\,;0_F)\,, \dots, (e_p\,;0_F)\,, (0_E\,;f_1)\,, \dots, (0_F\,;f_q) \Big)$ est donc une famille génératrice de $E \times F$.

Reste à vérifier qu'elle est libre. On considère pour cela une combinaison linéaire nulle de ses vecteurs :

$$\lambda_1\,(e_1\,;0) + \dots + \lambda_p\,(e_p\,;0) + \mu_1\,(0\,;f_1) + \dots + \mu_q\,(0\,;f_q) = (0_E\,;0_F)\,.$$

Relation qui s'écrit dans $E \times F$ sous la forme :

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p\,;\mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q) = (0_E\,;0_F) \iff \begin{cases} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p & = 0_E \\ \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q & = 0_F \end{cases}$$

La liberté des familles $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_q)$ entraîne que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_q = 0_{\mathbb{K}}$ et la liberté de $\mathcal{B}$.

En conclusion, la famille $\mathcal{B}$ est donc libre et génératrice de $E \times F$. Elle en forme donc une base.

L'espace $E \times F$ est donc de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Ce résultat se généralise aisément par récurrence :

Si E_1, ..., E_n sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \dim(E_k).$$

En particulier, si $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{K}$, on retrouve $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

II.3 Dimension et cardinal des familles

Théorème 10 (Familles libres) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si } \mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p) \text{ est libre, alors } p \leqslant n.$$

On dira que toute famille libre d'un espace de dimension n admet au plus n éléments.

Preuve : E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc une base de dimension n. Cette base est en particulier une famille génératrice de cardinal n.

D'après le corollaire (7.2) , toute famille libre a un cardinal $p \leqslant n$.

Si de plus $p = n$, $\mathcal{F}$ étant libre, d'après le théorème (7) de la base incomplète, $\mathcal{F}$ peut être complétée en une base, qui aura pour cardinal n. Donc $\mathcal{F}$ est une base.

Corollaire 10.1 :
Toute famille libre de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$.

Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$.

Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Correction : Montrons que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ est libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x) = 0$.

Alors :

$$\phi^{n-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)) = 0.$$

Mais comme de plus $\phi^n = 0$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\phi^{n-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 \phi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x)) &= \phi^{n-1}(\lambda_0 x) + \phi^n(\lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1}\phi^{n-2}(x)) \\ &= \phi^{n-1}(\lambda_0 x) = \lambda_0 \phi^{n-1}(x).\end{aligned}$$

Comme $\phi^{n-1}(x) \neq 0$ on obtient $\lambda_0 = 0$.

En calculant ensuite $\phi^{n-2}(\lambda_1 \phi(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\phi^{n-1}(x))$ on obtient $\lambda_1 = 0$ puis, de proche en proche, $\lambda_2 = 2$,..., $\lambda_{n-1} = 0$.

La famille $\{x, \phi(x), \dots, \phi^{n-1}(x)\}$ est donc libre. En plus elle compte n vecteurs, comme $\dim(\mathrm{E}) = n$ elle est libre et maximale et forme donc une base de E.

Théorème 11 (Familles génératrices) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.

On dira que toute famille génératrice d'un espace de dimension n admet au moins n éléments.

Preuve : Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E de cardinal p.

D'après le théorème (6) de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base de E. Son cardinal est alors $n \leqslant p$.

Supposons que de plus $p = n$. Si $\mathcal{F}$ était liée, alors il existerait un vecteur u_k combinaison linéaire des autres. Les $p-1$ autres formeraient encore une famille génératrice, et on aurait $n \leqslant p-1$. Absurde !

Par conséquent, $\mathcal{F}$ est libre. C'est donc une base.

Corollaire 11.1 :
Toute famille génératrice de n éléments d'un espace de dimension n en forme une base.

Théorème 12 (Synthèse) :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice de E.}$$

Preuve : Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n éléments de E.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, elle est libre et génératrice (par définition).
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E.

  Or, $p = dim(\mathrm{E}) = n$.

  Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice. Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E.

  Or, $p = dim(\mathrm{E}) = n$.

  Donc, $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

Méthode 1 (Montrer qu'une famille est une base) :
Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace, il suffit de prouver qu'une famille de n vecteurs est libre *ou* génératrice pour montrer qu'elle est une base.

Exemple 11 : Notons $\mathrm{T}_i \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev.

Les exercices sont nombreux où l'on montre que la famille $(\mathrm{T}_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une famille échelonnée. Elle est donc libre.

De cardinal $n+1$, la famille $(\mathrm{T}_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

En particulier, on pourra décomposer tout polynôme de degré inférieur à n en fonction des polynômes T_i, $i \in [\![0\,;n]\!]$.

Le raisonnement est et sera identique avec toutes les familles de polynômes échelonnée par les degrés que vous devriez rencontrer sous peu : de Taylor, de Bernoulli, de Bernstein, de Fibonacci, de Gegenbauer, de Hermite, de Hilbert, de Jacobi, de Laguerre, de Legendre, de Tchebychev, orthogonaux, ... Que du beau monde !

Exercice 10 : $\mathrm{P}_0 = 2, \quad \mathrm{P}_1 = 3\mathrm{X} - 4, \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 3.$

Montrer que $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Correction : La famille (P_0, P_1, P_2) est une famille échelonnée par les degrés de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_2[X]$. Elle est donc libre de cardinal la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ d'où une base de ce dernier.

III/ Sous-espaces vectoriels

III.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 13 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E.

Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Méthode 2 (Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux) :
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps. Pour montrer que $F = E$, il suffit de montrer que F est un sev de E et que $\dim(F) = \dim(E)$.

Preuve :

1. — Si $F = \{0\}$, $\dim(F) = 0$ et donc $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
   — Sinon, il existe un vecteur e_1 non nul dans F. Considérons $\mathcal{F}_1 = \{e_1\}$.

   — Si $\mathcal{F}_1$ engendre F, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 1$.
   — Sinon, il existe $e_2 \in F$ tel que $e_2 \notin \text{vect}(\mathcal{F}_1)$. Soit $\mathcal{F}_2 = \{e_1, e_2\}$. $\mathcal{F}_2$ est libre.

   On réitère le raisonnement : soit $\mathcal{F}_p = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ libre, avec $e_1, e_2, \cdots, e_p \in F$.

   — Si $\mathcal{F}_p$ engendre F, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = p$.
   — Sinon, il existe $e_{p+1} \in F$ tel que $e_{p+1} \notin \text{vect}(\mathcal{F}_p)$. Soit $\mathcal{F}_{p+1} = \{e_1, e_2, \cdots, e_{p+1}\}$. $\mathcal{F}_{p+1}$ est libre.

   Si le procédé ne s'est pas arrêté avant $n+1$, on a construit une famille libre de $n+1$ éléments dans un espace de dimension n. C'est absurde.

   Le procédé s'arrête donc avant n. Donc F est de dimension finie, et $\dim(F) = p \leqslant n$.
2. Une base $\mathcal{B}$ de F est une famille libre de n vecteurs.

   C'est donc une base de E et $\text{vect}(\mathcal{B}) = E$. Comme $\text{vect}(\mathcal{B}) = F$, on obtient $F = E$.

Exercice 11 : Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de la forme :

$$aX^4 + (a+b)X, \qquad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$, et en donner une base.

Correction :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^4 + (a+b)X \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, P = a(X^4 + X) + bX \\ &\iff P \in \text{vect}\,(X^4 + X, X) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{vect}\,(X^4 + X, X)$.

— La famille $(X^4 + X, X)$ est génératrice de F. Comme elle est finie, on en déduit que F **est de dimension finie**.
— Par ailleurs, $(X^4 + X, X)$ est libre (car de degrés distincts).

On en déduit que $(X^4 + X, X)$ est une base de F *i.e.* $\dim(F) = 2$.

Définition 7 (Sous-espaces remarquables) :
— On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel (ou sev) de dimension 1.
— On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel (ou sev) de dimension 2.
— Dans un espace de dimension finie n ($n \geqslant 1$), on appelle *hyperplan* tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Remarque : On verra une autre définition plus générale des hyperplans au chapitre suivant d'algèbre linéaire.

Exemples 12 :
— Les droites vectorielles sont les sous-espaces vectoriels de la forme $\text{vect}\,(x)$ où x un vecteur **non nul**.
— Les plans vectoriels ceux de la forme $\text{vect}\,(x\,;y)$ où x et y sont deux vecteurs non colinéaires.

Remarque : Les hyperplans du plan sont les droites vectorielles tandis que les hyperplans de l'espace sont les plans vectoriels. À méditer !...

III.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 8 : Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1, \dots, u_p) \in \mathrm{E}^p$ une famille d'éléments de E.

On appelle *rang de* $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\mathrm{rg}\,(u_1, \dots, u_p)$, la dimension du sous-espace engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim\left(\mathrm{vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p)\right).$$

Remarque : Le rang est bien défini puisque $\mathrm{vect}\,(u_1, \dots, u_p)$ est de dimension finie. En effet, il admet évidemment $(u_1, \dots, u_p)$ comme famille génératrice finie.

Exemple 13 : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (1\,;1\,;0)$ et $w = (3\,;4\,;3)$.

1. On a $w = u + 2v$, donc $\mathrm{vect}\,(u, v, w) = \mathrm{vect}\,(u, v)$.
2. $u \notin \mathrm{vect}\,(v)$ donc la famille (u, v) est libre. Par définition, elle engendre $\mathrm{vect}\,(u, v)$.
3. Par conséquent, (u, v) est une base de $\mathrm{vect}\,(u, v)$ *i.e.* $\dim \mathrm{vect}\,(u, v) = 2$.
4. Ainsi, $\mathrm{rg}\,(u, v, w) = \dim \mathrm{vect}\,(u, v, w) = \dim \mathrm{vect}\,(u, v) = 2$.

Proposition 14 :
Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors :

1. $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant n$.
2. $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant p$.

En particulier, $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) \leqslant \min(n\,;p)$.

3. $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p$.

Preuve : On pose $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p)$

1. F est un sev de E donc $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) \leqslant n$;
2. F est engendré par p vecteurs donc $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) \leqslant p$;
3. ($\Rightarrow$) Si $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est libre alors c'est une base de F.

   Par conséquent, $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \dim(\mathrm{F}) = p$;

   ($\Leftarrow$) Si $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_p) = p$, alors $\dim(\mathrm{F}) = p$.

   La famille $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ étant génératrice de F et ayant autant d'éléments que $\dim(\mathrm{F}) = p$, c'en est une base. En particulier, elle est libre.

Exemple 14 : Déterminons le rang de la famille suivante :

$$x_1\,(1\,;-1\,;1)\,,\ x_2\,(-1\,;1\,;-1)\,,\ x_3\,(0\,;1\,;1)\,,\ x_4\,(1\,;0\,;2)\,.$$

1. Nous avons quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On sait déjà que cette famille est nécessairement liée.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$. On a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & & & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient un système homogène, échelonné réduit. Il possède deux inconnues principales λ_1 et λ_3, deux inconnues secondaires ou paramètres λ_2 et λ_4 (on retrouve bien que cette famille est liée).

En particulier,

- pour $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, $x_2 = -x_1$.
- pour $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, $x_4 = x_1 + x_3$.

Ainsi, $\operatorname{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{vect}(x_1, x_3)$.

3. Comme la famille (x_1, x_3) est libre (deux vecteurs non colinéaires, ou autrement en prenant $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ dans le système ci-dessus), on en déduit que

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2.$$

En particulier,

À retenir 1 (Opérations ne changeant par le rang) :

— Retirer un vecteur nul :
$$\operatorname{rg}(u, v, 0, w) = \operatorname{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur figurant plusieurs fois (en en conservant un !) :
$$\operatorname{rg}(u, v, w, v, u, w, w, w) = \operatorname{rg}(u, v, w).$$

— Retirer un vecteur combinaison linéaire des *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, 2u + 3v) = \operatorname{rg}(u, v).$$

— Ajouter des multiples d'un vecteurs aux *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, w) = \operatorname{rg}(u, v - 2u, w + 7u).$$

— Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des *autres* vecteurs :
$$\operatorname{rg}(u, v, w) = \operatorname{rg}(u, v, w + 2u + 3v).$$

Exercice 12 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère :

$$u = (1,2,3,4), \quad v = (4,3,2,1), \quad w = (1,2,1,2), \quad x = (2,1,2,1), \quad y = (1,1,1,1).$$

Déterminer $\operatorname{rg}(u,v,w,x,y)$.

Correction :

— On constate que $u+v = 5y$ donc $v = 5y - u$.

Par conséquent,

$$\operatorname{vect}(u,v,w,x,y) = \operatorname{vect}(u,w,x,y).$$

— On a aussi $w + x = 3y$ donc $x = 3y - w$ et $\operatorname{vect}(u,w,x,y) = \operatorname{vect}(u,w,y)$.

On en déduit que $\operatorname{rg}(u,v,w,x,y) = \operatorname{rg}(u,w,x,y) = rg(u,w,y) \leqslant 3$.

Or, la famille (u,w,y) est libre. En effet,

$$au + bw + cy = 0 \implies \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Par conséquent $\operatorname{rg}(u,w,y) = 3$ puis,

$$\operatorname{rg}(u,v,w,x,y) = 3.$$

III.3 Sous-espaces supplémentaires

Théorème 15 (Base adaptée) :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(f_1,\dots,f_p) \in \mathrm{F}^p$ et $(g_1,\dots,g_q) \in \mathrm{G}^q$ des familles de vecteurs de F et G.

1. Si $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont libres et si $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est directe, alors $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est libre.
2. Si $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont génératrices (de F et G respectivement) et si $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est génératrice de E.
3. Si $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont des bases de F et G respectivement et si $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est une base de E.

   Cette base est dite *adaptée* à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

Preuve :

1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j = 0 \iff \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i}_{\in \mathrm{F}} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j}_{\in \mathrm{G}}$$
$$\underset{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}}{\overset{}{\implies}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = \sum_{j=1}^{q} \mu_j g_j = 0.$$

   Par liberté des familles $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$, on en déduit que $\forall\, i \in [\![1\,;p]\!]$, $\lambda_i = 0$ et $\forall\, j \in [\![1\,;q]\!]$, $\mu_j = 0$:

   La famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre.

2. Comme $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\left(f_1, \dots, f_p\right)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\left(g_1, \dots, g_q\right)$, on obtient :

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{vect}\left(f_1, \dots, f_p\right) + \mathrm{vect}\left(g_1, \dots, g_q\right) = \mathrm{vect}\left(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q\right).$$

   La famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est donc génératrice de E.
3. Le dernier point vient directement des deux précédents.

Exemple 15 : Soient $\mathrm{F} = \left\{(x_1\,;x_2\,;x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\left((1\,;1\,;1)\right)$.

— Le vecteur $e_3 = (1\,;1\,;1)$ engendre G et est non nul. Donc (e_3) est une base de G.

— On a montré que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\left(e_1 = (1\,;0\,;-1)\,; e_2 = (0\,;1\,;-1)\right)$.

  Donc (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est également libre.

  Ainsi (e_1, e_2) est une base de F.

— On a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On déduit de la propriété précédente que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 : Soient $\mathrm{F} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

1. $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathrm{F} &\iff 2x + y = 0 \\ &\iff y = -2x \\ &\iff (x, y) = (x, -2x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -2) \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{F} = \mathbb{R}(1, -2)$.

   On en déduit que :
   — F est un sev de E ;

— $((1,-2))$ est une base de F *i.e.* $\dim(\mathrm{F})=1$.

De même,

— $\mathrm{G}=\mathbb{R}(1,1)$ est un sev de E ;

— $((1,1))$ est une base de G et donc $\dim(\mathrm{G})=1$.

2. Montrons que $\mathbb{R}^2=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

— F et G sont en somme directe. En effet,

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G} &\iff \begin{cases}2x+y=0\\ x-y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ &\iff (x,y)=(0,0)\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{(0,0)\}$.

— De plus, $\dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})=2=\dim\mathbb{R}^2$.

On conclut que $\mathbb{R}^2=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

Dans la même lignée,

Proposition 16 :
Soient $(e_1,\dots e_n)\in\mathrm{E}^n$, $p\in[\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{F}=\mathrm{vect}\,(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathrm{G}=\mathrm{vect}\,(e_{p+1},\dots,e_n)$.

1. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est directe.
2. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$.
3. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E alors F et G sont supplémentaires dans E.

Preuve :

1. Soit $x\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. On a :

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{F} &\iff \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\ x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i.\\ x\in\mathrm{G} &\iff \exists\,(\mu_{p+1},\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^{n-p},\ x=\sum_{i=p+1}^{n}\mu_i e_i.\end{aligned}$$

D'où,

$$\implies \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i+\sum_{i=p+1}^{n}(-\mu_i)e_i=0.$$

Comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_i=\mu_j=0$ pour tous $i\in[\![1\,;p]\!]$ et $j\in[\![p+1\,;n]\!]$.

Ainsi, $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i=0$ *i.e.* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}$.

2. Soit $x\in\mathrm{E}$.

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\lambda_{p+1} e_{p+1} \dots + \lambda_n e_n}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F} + \mathrm{G}.$$

L'inclusion réciproque étant de fait, on a bien démontré que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.

3. Le troisième point est conséquence de deux précédents.

Corollaire 16.1 :
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. $\dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G})$
2. Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})$.

Arrive un théorème important :

Théorème 17 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev *de dimension finie n.*

Tout sev de E admet au moins un sous-espace supplémentaire dans E.

Preuve : Soit F un sev de E et considérons une base $(e_1, \cdots, e_p)$ de F. On sait que celle-ci existe car F est de dimension finie.

Cette famille libre de E peut être complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$ de E.

On considère $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$.

D'après la proposition précédente, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ *i.e.* G est un supplémentaire de F.

Corollaire 17.1 (Formule de Grassmann) :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E.

Alors :

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}).$$

Preuve : Deux méthodes :

1. $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sev de F. Il admet un supplémentaire dans F, disons F' :

   $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{F}' = \mathrm{F}$. On a donc $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) + \dim \mathrm{F}' = \dim(\mathrm{F})$.

   Mais $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{F}' \oplus \mathrm{G}$.

   D'où $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}' \oplus \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F})' + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) + \dim(\mathrm{G})$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ qu'on complète en :
   - $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

- $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ une base de G.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et est libre dans $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ donc en forme une base.

Le corollaire (16.1) fait le reste.

Exemple 16 : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons l'intersection de deux plans vectoriels P_1, P_2 non confondus.

1. Comme $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 \subset \mathrm{E}$, on a $\dim(\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2) \leqslant 3$ donc :
$$\dim(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2) = \dim(\mathrm{P}_1) + \dim(\mathrm{P}_2) - \dim(\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2) \geqslant 2+2-3 = 1,$$
ce qui prouve que $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ n'est pas réduit à $0_{\mathbb{R}^3}$.
2. Comme P_1 et P_2 ne sont pas confondues, P_1 est strictement inclus dans $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$ donc
$$2 = \dim(\mathrm{P}_1) < \dim(\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2) \leqslant 3.$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2) = 3$ et donc $\dim(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2) = 1$: L'intersection des deux plans P_1 et P_2 est une droite vectorielle.

On retiendra surtout comment montrer que deux espaces sont supplémentaires :

À retenir 2 :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E. Alors :
$$\begin{aligned}(i).\ \mathrm{F}\oplus\mathrm{G} = \mathrm{E} \iff (ii).\ &\begin{cases}\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0\}\\ \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})\end{cases}\\ \iff (iii).\ &\begin{cases}\mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}\\ \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E}).\end{cases}\end{aligned}$$

Preuve : Utilisons la transitivité de l'équivalence :

— (i) entraine immédiatement (ii) et (iii).

— $(iii) \implies (ii)$: Supposons (iii). D'après la formule de Grassmann, on a :
$$\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = 0 \implies \mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

— $(ii) \implies (i)$: Supposons (ii). D'après la formule de Grassmann, on a :
$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E}) \implies \mathrm{F}+\mathrm{G} = \mathrm{E}.$$
De plus $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ donc la somme $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est directe *i.e.* $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Exemple 17 (Important) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et H un hyperplan de E de dimension $n-1$. Alors pour tout $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$, on a :

$$\mathrm{H} \oplus \mathbb{K}a = \mathrm{E}.$$

En effet,

1. En remarquant que a ne peut être nul sans appartenir à H, on a :

$$\dim(\mathrm{H}) + \dim(\mathbb{K}a) = n = \dim(\mathrm{E}).$$

2. Comme $\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(a) \subset \mathrm{vect}(a)$ alors $\dim(\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(a)) = 0$ ou 1.

   Si c'est 1, alors $\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(a) = \mathrm{vect}(a)$ et a appartiendrait à H, ce qui est faux.

   Donc $\dim(\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(a)) = 0$ et $\mathrm{H} \cap \mathrm{vect}(a) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Les sev H et $\mathrm{vect}(a)$ sont donc en somme directe dans E : tout espace de dimension finie se décompose de manière directe en un hyperplan et une droite vectorielle.

ATTENTION Rien ne dit que cette décomposition est unique ! C'est l'écriture dans ces décompositions qui l'est !

Exercice 14 : On considère $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.
2. Montrer que $\mathrm{vect}(1, \mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

Correction : Soit $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^3 + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X} + e$. Alors, on a $\mathrm{P}' = 4a\mathrm{X}^3 + 3b\mathrm{X}^2 + 2c\mathrm{X} + d$.

$$\mathrm{P} \in \mathrm{F} \iff \begin{cases} \mathrm{P}(0) = 0 \\ \mathrm{P}'(0) = 0 \\ \mathrm{P}'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e = 0 \\ d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e = 0 \\ d = 0 \\ c = -2a - \dfrac{3}{2}b \end{cases}$$

$$\iff \mathrm{P} = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^3 + \left(-2a - \frac{3}{2}b\right)\mathrm{X}^2$$

$$\iff \mathrm{P} = a(\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2) + \frac{b}{2}(2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2)$$

Donc, $\mathrm{F} = \mathrm{vect}(2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2)$.

En particulier, F est un sev de E.

La famille $(2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2)$ engendre F et elle est libre (car échelonnée en degré). C'est donc une base de F.

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{vect}(1, \mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$.

La famille $(1, \mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2, 2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2)$

— est libre (car échelonnée par les degrés) ;
— compte 5 éléments dans $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ de dimension 5.

Elle forme donc une base de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

D'après le théorème de la base adaptée, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{vect}\,(1, \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2) \oplus \mathrm{vect}\,(2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2, \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2) &= \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \\ \mathrm{G} \oplus \mathrm{F} &= \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]. \end{aligned}$$