Dimension finie

Une seule réponse exacte par question.

Dans toutes les questions, sauf mention contraire, E *est un espace vectoriel réel de dimension finie* $n \geqslant 1$.

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

   Laquelle des conditions suivantes permet de dire que cette famille est liée ?

   (a) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ engendre E
   (b) ☑ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ engendre E
   (c) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ n'engendre pas E
   (d) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ n'engendre pas E

2. On considère $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors la famille (e_1, e_2, e_3) est

   (a) ☐ génératrice mais pas libre
   (b) ☐ libre mais pas génératrice
   (c) ☐ une base
   (d) ☑ ni libre, ni génératrice

3. Soit $\mathrm{E} = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Alors

   (a) ☑ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1
   (b) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2
   (c) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3
   (d) ☐ E n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

4. Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors
   (a) ☐ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} = p$
   (b) ☑ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant p$
   (c) ☐ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \geqslant p$
   (d) ☐ E n'est pas nécessairement de dimension finie

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Quelle affirmation est vraie ?
   (a) ☐ toute base de E contient une base de F
   (b) ☑ toute base de F est contenue dans une base de E
   (c) ☐ toute famille génératrice de E contient une famille génératrice de F
   (d) ☐ toute base de E contient une famille génératrice de F

6. Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{G}'$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}'$.

   À quelle condition peut-on dire que $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$?

   (a) ☐ C'est toujours le cas
   (b) ☑ Si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$
   (c) ☐ Si F est non nul
   (d) ☐ Si $\mathrm{G} + \mathrm{G}' = \mathrm{E}$

7. Soit E un espace vectoriel dans lequel toute famille de 3 vecteurs est liée. Alors
   (a) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant 3$
   (b) ☑ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant 2$
   (c) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$
   (d) ☐ E n'est pas forcément de dimension finie

8. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

   Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\text{vect}\,(e_1)$?

   (a) ☐ $\text{vect}\,(e_2, e_3)$
   (b) ☐ $\text{vect}\,(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$
   (c) ☑ $\text{vect}\,(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$
   (d) ☐ $\text{vect}\,(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

9. Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace E de dimension 3 et P un plan de E.

   À quelle condition (e_1, e_2) est une base de P ?

   (a) ☐ lorsque e_3 n'est pas dans P
   (b) ☑ lorsque e_1 et e_2 sont dans P
   (c) ☐ lorsque e_3 est dans $\text{vect}\,(e_1, e_2)$.
   (d) ☐ lorsque (e_1, e_2, e_3) est génératrice de P.

10. Soit F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ de dimensions respectives p et q.

    Dans lequel des cas suivants peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$?

    (a) ☐ $p = 4$ et $q = 2$
    (b) ☑ $p = 3$ et $q = 4$
    (c) ☐ $p = 2$ et $q = 4$
    (d) ☐ $p = 1$ et $q = 2$

11. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases de E.

    La famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ peut être complétée en une base

    (a) ☐ uniquement par le vecteur e_n
    (b) ☐ par n'importe lequel des vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_n$
    (c) ☑ par au moins un des vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_n$
    (d) ☐ par aucun des vecteurs de la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$

12. Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ des vecteurs de E.

    Laquelle des conditions suivantes assure que x_p est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$

    (a) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est liée
    (b) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est libre
    (c) ☑ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est libre et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est liée
    (d) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est liée et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre

13. On suppose que (e_1, e_2, e_3) engendre l'espace vectoriel E.

    Laquelle des conditions suivantes assure que E est de dimension 3 ?

    (a) ☐ (e_1, e_2) est libre
    (b) ☐ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ sont libres
    (c) ☐ (e_1, e_2) n'engendre pas E
    (d) ☑ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ n'engendrent pas E

14. Soient e_1, e_2, e_3, e_4 des vecteurs de E. On suppose que les familles (e_1, e_2, e_3) et (e_3, e_4) sont libres.

    La dimension de E est forcément supérieure ou égale à

    (a) ☐ 2 (b) ☑ 3 (c) ☐ 4 (d) ☐ 5

15. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q et tels que $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$.

    La dimension d'un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans F est :

    (a) ☐ q (b) ☐ 0 (c) ☑ $n-q$ (d) ☐ $n+q$

16. Soient F, G deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La dimension p de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ peut valoir

    (a) ☐ 1 ou 2 (b) ☑ $1, 2$ ou 3 (c) ☐ $0, 1$ ou 2 (d) ☐ $0, 1, 2$ ou 3

17. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille libre de G. Quelle condition suffit pour dire que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre ?

    (a) ☐ $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$
    (b) ☑ $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}=\{0\}$
    (c) ☐ $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$
    (d) ☐ $g_1, \dots, g_q$ ne sont pas dans F et $f_1, \dots, f_p$ ne sont pas dans G.