

Dimension finie

I/ Familles libres, liées. Bases _____

Exercice 1 : Soient $u = (1; 2; 3)$, $v = (0; 1; 2)$ et $w = (0; 0; 1)$.

1. Montrer que $(u; v; w)$ est libre.
2. Trouver la décomposition de $(5, 6, 7)$ comme combinaison linéaire de u, v, w .

Exercice 2 : Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^2$, on considère $v_1 = (1; 2)$, $v_2 = (3; 1)$ et $v_3 = (-5; 0)$.

Montrer que $\text{vect}(v_1, v_2) = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 3 (Classiques) :

1. La famille $((5, -2, -3), (4, 1, -3), (-2, -7, 3))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $P_1 = X - 1$ et $P_2 = X^2 - 1$.

Montrer que (P_1, P_2) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n.$$

Montrer que la famille $\left((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Dans un $\mathbb{R}$ -ev à préciser, montrer que la famille $(x \mapsto e^x; x \mapsto e^{2x}; x \mapsto e^{3x})$ est libre.

Exercice 4 : La famille A engendre-t-elle l'espace vectoriel E ?

1. $A = ((1, 1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
2. $A = ((1, 1))$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$
3. $A = ((1, 1))$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$
4. $A = ((1, 1), (1, -1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
5. $A = ((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ et $E = \mathbb{R}^2$
6. $A = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$

Exercice 5 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 5\beta, y = -\alpha + 3\beta, z = 7\beta\}$.

Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$, et que tout élément de E est combinaison linéaire de deux éléments qu'on déterminera.

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le sev $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) = P(-1) = 0\}$.

Montrer que F est une droite vectorielle engendrée par un polynôme P_0 que l'on déterminera.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x_1 = (-1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$ et $x_3 = (1, 1, -1)$.

Démontrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II/ Dimension d'un espace vectoriel _____

Exercice 9 : Montrer que $((0; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivant :

1. $E_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a + d = 0 \right\}$.
3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 12 (Polynômes factoriels ou de Hilbert) : On considère les polynômes suivants :

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \frac{X(X-1)}{2} \text{ et } P_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Décomposer X^3 dans cette base.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On pose :

$$\alpha_0 = P(0), \alpha_1 = P(1) - P(0), \alpha_2 = P(2) - 2P(1) + P(0), \alpha_3 = P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0)$$

$$\text{et } Q = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3.$$

Calculer $Q(k)$ pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Que peut-on en déduire?

Exercice 13 : Redémontrer le théorème de Taylor pour les polynômes.

III/ sous-espaces

Exercice 14 : Calculer le rang de chaque famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (0, 1, 2, -1)$, $x_3 = (1, 0, -2, 3)$, $x_4 = (2, 1, 0, -1)$.
2. $x_1 = (1, 0, 1, 0)$, $x_2 = (2, 1, 0, 1)$, $x_3 = (0, 2, -1, 1)$, $x_4 = (3, -1, 2, 0)$.
3. $x_1 = (2, 3, 5)$, $x_2 = (-1, 2, -3)$, $x_3 = (4, -3, 8)$, $x_4 = (-4, 17, -10)$.
4. $x_1 = (2, -3, 4)$, $x_2 = (3, 1, 5)$, $x_3 = (-1, 0, 1)$, $x_4 = (0, 2, 4)$.

Exercice 15 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\text{vect}(u, v, w)$ avec $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Exercice 16 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (0, 1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1, 1)$, $w = (1, 1, 1, -4)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.

1. Vérifier que P est un sev de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $P + \text{vect}(u, v) = \mathbb{R}^4$, mais que $P \cup \text{vect}(u, v) \neq \mathbb{R}^4$.
3. Montrer que P et $\text{vect}(u, v)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 17 : On considère pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ les fonctions suivantes :

$$f_k : \theta \mapsto \cos(k\theta) \text{ et } g_k : \theta \mapsto (\cos(\theta))^k.$$

On notera $f_0 = g_0$ la fonction constante égale à 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est libre.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.
3. Utilisation des polynômes de Tchebychev

On admet qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré au plus n et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n) = \text{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.