Dimension finie

I/ Familles libres, liées. Bases

Exercice 1 : Soient $u = (1\,;2\,;3)$, $v = (0\,;1\,;2)$ et $w = (0\,;0\,;1)$.

1. Montrer que $(u\,;v\,;w)$ est libre.
2. Trouver la décomposition de $(5, 6, 7)$ comme combinaison linéaire de u, v, w.

Correction : $(5\,;6\,;7) = 5u - 4v$.

Exercice 2 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, on considère $v_1 = (1\,;2)$, $v_2 = (3\,;1)$ et $v_3 = (-5\,;0)$.

Montrer que $\operatorname{vect}(v_1, v_2) = \operatorname{vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Correction : Il suffit de montrer que $v_3 \in \operatorname{vect}(v_1, v_2)$ ce qui est fait en remarquant que $v_3 = v_1 - 2v_2$.

Exercice 3 (Classiques) :

1. La famille $((5, -2, -3), (4, 1, -3), (-2, -7, 3))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $P_1 = X - 1$ et $P_2 = X^2 - 1$.

   Montrer que (P_1, P_2) est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = 4^n.$

   Montrer que la famille $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Dans un $\mathbb{R}$-ev à préciser, montrer que la famille $(x \longmapsto e^x\,; x \longmapsto e^{2x}\,; x \longmapsto e^{3x})$ est libre.

Exercice 4 : La famille A engendre-t-elle l'espace vectoriel E ?

1. $A = ((1, 1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
2. $A = ((1, 1))$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$
3. $A = ((1, 1))$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$
4. $A = ((1, 1), (1, -1))$ et $E = \mathbb{R}^2$
5. $A = ((1, 1), (1, -1), (1, 0))$ et $E = \mathbb{R}^2$
6. $A = ((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$

Exercice 5 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 5\beta, y = -\alpha + 3\beta, z = 7\beta\}$.

Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$, et que tout élément de E est combinaison linéaire de deux éléments qu'on déterminera.

Correction : Par définition de E, il est assez clair que $E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 6 : Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le sev $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(1) = P(-1) = 0.\}$.

Montrer que F est une droite vectorielle engendrée par un polynôme P_0 que l'on déterminera.

Correction : Il est clair que $P_0 = (X + 1)(X - 1) \in F$ donc $\text{vect}\,(P_0) \subset F$.

Montrons l'inclusion réciproque en prenant P quelconque dans F.

Comme P est de degré au plus 2 et admet deux racines distinctes, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $P = \lambda(X - 1)(X + 1) = \lambda P_0 \in \text{vect}\,(P_0)$ et $F \subset \text{vect}\,(P_0)$.

Par double inclusion, on a le résultat.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x_1 = (-1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$ et $x_3 = (1, 1, -1)$.

Démontrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction : Soient trois réels a, b et c tels que :

$$\begin{aligned} a(-1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1) = 0 &\iff (-a + b + c, a - b + c, a + b - c) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille (x_1, x_2, x_3) est donc libre.

Montrons qu'elle est génératrice :

— **Méthode 1** Soit $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$.

$$a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1)=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \iff (-a+b+c, a-b+c, a+b-c)=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$$
$$\iff \begin{cases} -a+b+c=\mathrm{A} \\ a-b+c=\mathrm{B} \\ a+b-c=\mathrm{C} \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2} \\ b=\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2} \\ c=\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} \end{cases}$$

Donc tout vecteur $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})\in\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire de (x_1,x_2,x_3).

La famille (x_1,x_2,x_3) est donc génératrice.

Finalement, libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, (x_1,x_2,x_3) en est une base.

— **Méthode 2** Comme (x_1,x_2,x_3) est libre et compte trois vecteurs en dimension 3, la famille (x_1,x_2,x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $\mathrm{P}_k=\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^{n-k}$.

Montrer que $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Correction :

— Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\mathrm{P}_k=0$.

$$\begin{array}{r|lllllll} \lambda_0\times & \mathrm{P}_0 = & (\mathrm{X}-1)^n & = & (-1)^n+ & \cdots & & \\ \lambda_1\times & \mathrm{P}_1 = & \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)^{n-1} & = & & (-1)^{n-1}\mathrm{X}+ & \cdots & \\ \lambda_2\times & \mathrm{P}_2 = & \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-1)^{n-2} & = & & & (-1)^n\mathrm{X}^2+ & \cdots \end{array}$$

— D'où $(-1)^n\lambda_0+\cdots=0$

Par identification, en déduit que $\lambda_0=0$.

— Il reste $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathrm{P}_k=0$, i.e. $(-1)^{n-1}\lambda_1\mathrm{X}+\cdots=0$.

Par identification, en déduit que $\lambda_1=0$.

On itère ou on fait une récurrence, et on obtient : $\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.

La famille $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n)$ **est libre.**

— Cette famille libre compte $n+1$ vecteurs en dimension $n+1$.

Donc $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Remarque : On pourrait parler ici d'une famille échelonnée par les *valuations*.

II/ Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 9 : Montrer que $((0\,;1\,;1)\,;(1\,;0\,;1)\,;(1\,;1\,;0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 : Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivant :

1. $\mathrm{E}_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -x+3y+z=0\}$.
2. $\mathrm{E}_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, a+d=0\right\}$.
3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 : Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Correction :

1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
   (a) l'origine $(0,0,0,0)$ est dans E,
   (b) si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{E}$ et $v' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \in \mathrm{E}$ alors $v+v' = (x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3', x_4+x_4')$ a des coordonnées qui vérifient l'équation et donc $v+v' \in \mathrm{E}$.
   (c) si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les coordonnées de $\lambda \cdot v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ vérifient l'équation et donc $\lambda \cdot v \in \mathrm{E}$.
2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E.

   Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $v_1 = (1, -1, 0, 0)$.

   Il est bien clair que v_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur v_2 linéairement indépendant de v_1, prenons $v_2 = (1, 0, -1, 0)$. Alors $\{v_1, v_2\}$ n'engendrent pas tout E ; par exemple $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ est dans E mais n'est pas engendré par v_1 et v_2.

   Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une base de E.

(a) (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \\
&\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ -\alpha & = 0 \\ -\beta & = 0 \\ -\gamma & = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0
\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

(b) Montrons que la famille est génératrice : soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{E}$.

Il faut écrire v comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v$.

On obtient que $v = -x_2 v_1 - x_3 v_2 - x_4 v_4$ (on utilise $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Bien sûr, vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Exercice 12 (Polynômes factoriels ou de Hilbert) : On considère les polynômes suivants :

$$\mathrm{P}_0 = 1, \mathrm{P}_1 = \mathrm{X}, \mathrm{P}_2 = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}{2} \text{ et } \mathrm{P}_3 = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)}{6}.$$

1. Montrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[\mathrm{X}]$.
2. Décomposer X^3 dans cette base.
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_3[\mathrm{X}]$. On pose :

$$\alpha_0 = \mathrm{P}(0), \alpha_1 = \mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0), \alpha_2 = \mathrm{P}(2) - 2\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(0), \alpha_3 = \mathrm{P}(3) - 3\mathrm{P}(2) + 3\mathrm{P}(1) - \mathrm{P}(0)$$
$$\text{et } \mathrm{Q} = \alpha_0 \mathrm{P}_0 + \alpha_1 \mathrm{P}_1 + \alpha_2 \mathrm{P}_2 + \alpha_3 \mathrm{P}_3.$$

Calculer $\mathrm{Q}(k)$ pour $k \in [\![0\,;3]\!]$. Que peut-on en déduire ?

Dimension finie

Correction :

1. On sait que $\dim \mathbb{K}_3[X] = 4$ et on a $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;3]\!]$.

   On a donc une famille échelonnée en degré de 4 polynômes de $\mathbb{K}_3[X]$, donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

2. On sait qu'il existe a_0, a_1, a_2 et $a_3 \in \mathbb{K}$ tels que $X^3 = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3$.

   Or, $P_2 = \dfrac{X^2 - X}{2}$ et $P_3 = \dfrac{X^3 - 3X^2 + 2X}{6}$, donc :

$$\begin{aligned} X^3 &= a_0 + a_1X + \frac{a_2}{2}(X^2 - X) + \frac{a_3}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) \\ &= a_0 + \left(a_1 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{6}\right)X + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}\right)X^2 + \frac{a_3}{6}X^3. \end{aligned}$$

   Deux polynômes étant égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, on a :

$$X^3 = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 6a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 6 \\ a_3 = 6 \end{cases}$$

   En conclusion, $X^3 = 0P_0 + P_1 + 6P_2 + 6P_3$.

3. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} Q(0) &= \alpha_0P_0(0) + \alpha_1P_1(0) + \alpha_2P_2(0) + \alpha_3P_3(0) = \alpha_0 = P(0). \\ Q(1) &= \alpha_0P_0(1) + \alpha_1P_1(1) + \alpha_2P_2(1) + \alpha_3P_3(1) = \alpha_0 + \alpha_1 = P(1). \\ Q(2) &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = P(0) + 2P(1) - 2P(0) + P(2) - 2P(1) + P(0) = P(2). \\ Q(3) &= \alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ &= P(0) + 3P(1) - 3P(0) + 3P(2) - 6P(1) + 3P(0) + P(3) - 3P(2) + 3P(1) - P(0) \\ &= P(3). \end{aligned}$$

   Donc $Q(k) = P(k)$ pour $k \in [\![0\,;3]\!]$.

   Les deux polynômes étant de degré au plus 3 et coïncidant en 4 points distincts, ils sont égaux.

   Donc $P = \alpha_0P_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 + \alpha_3P_3$.

   En d'autre termes, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3).

Un peu d'histoire : *Soit $k \geqslant 1$ un entier. On définit le k-ième polynôme de Hilbert par*

$$H_k = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit également $H_0 = 1$.

En généralisant (beaucoup) le résultat de l'exercice, on montre que pour tout polynôme P de degré d à valeurs entières i.e. *vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ il existe des entiers m_0, ...m_d tels que :*

$$P = m_0H_0 + m_1H_1 + \ldots + m_dH_d.$$

Ce résultat montre en particulier que si P est de degré d et vérifie $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, alors les dénominateurs de ses coefficients sont tous des diviseurs de $d!$.

Exercice 13 : Redémontrer le théorème de Taylor pour les polynômes.

III/ sous-espaces

Exercice 14 : Calculer le rang de chaque famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (0, 1, 2, -1)$, $x_3 = (1, 0, -2, 3)$, $x_4 = (2, 1, 0, -1)$.
2. $x_1 = (1, 0, 1, 0)$, $x_2 = (2, 1, 0, 1)$, $x_3 = (0, 2, -1, 1)$, $x_4 = (3, -1, 2, 0)$.
3. $x_1 = (2, 3, 5)$, $x_2 = (-1, 2, -3)$, $x_3 = (4, -3, 8)$, $x_4 = (-4, 17, -10)$.
4. $x_1 = (2, -3, 4)$, $x_2 = (3, 1, 5)$, $x_3 = (-1, 0, 1)$, $x_4 = (0, 2, 4)$.

Correction :

1. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tels que $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

   On a $a(1, 1, 1, 1) + b(0, 1, 2, -1) + c(1, 0, -2, 3) + d(2, 1, 0, -1) = 0$.

   Donc, $\begin{cases} a + 0b + c + 2d = 0 \\ a + b + 0c + d = 0 \\ a + 2b - 2c + 0d = 0 \\ a - b + 3c - d = 0 \end{cases}$ et alors $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$.

   La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est libre.

   Donc son rang est égal au nombre de ses vecteurs :

   $$\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4.$$

   Remarque : (x_1, x_2, x_3, x_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tels que $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

   Donc $\begin{cases} a + 2b + 0c + 3d = 0 \\ 0a + b + 2c - d = 0 \\ a + 0b - c + 2d = 0 \\ 0a + b + c + 0d = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}$.

   On a (par exemple) $-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ donc $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$ et $\operatorname{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{vect}(x_1, x_2, x_3)$.

   Donc, $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3)$.

   La famille (x_1, x_2, x_3) est libre, donc $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3$ et $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.
3. $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.
4. $\operatorname{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3$.

Exercice 15 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\operatorname{vect}(u, v, w)$ avec $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Exercice 16 : Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (0, 1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1, 1)$, $w = (1, 1, 1, -4)$, et l'ensemble $\mathrm{P} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$.

1. Vérifier que P est un sev de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $\mathrm{P} + \operatorname{vect}(u, v) = \mathbb{R}^4$, mais que $\mathrm{P} \cup \operatorname{vect}(u, v) \neq \mathbb{R}^4$.
3. Montrer que P et $\operatorname{vect}(u, v)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
4. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 17 : On considère pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ les fonctions suivantes :

$$f_k : \theta \mapsto \cos(k\theta) \text{ et } g_k : \theta \mapsto (\cos(\theta))^k.$$

On notera $f_0 = g_0$ la fonction constante égale à 1.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est libre.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.
3. Utilisation des polynômes de Tchebychev

   On admet qu'il existe une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_n$ est de degré au plus n et :
   $$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{vect}(g_0, g_1, \dots, g_n) = \operatorname{vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k g_k = 0$. On a :
   $$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k(\cos(\theta))^k = 0_{\mathbb{R}}.$$
   En notant $x = \cos(\theta)$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0_{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in [-1\,;1]$.

   Cela montre que le polynôme $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ admet une infinité de racines. Il est donc nul, donc tous ses coefficients sont nuls.

   D'où $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

   La famille $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ est libre.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$: « la famille $(f_0, f_2, \dots, f_n)$ est libre ».
   - Initialisation :

     Pour $n = 0, \mathscr{P}_0$ est vraie, car f_0 n'est pas la fonction nulle.
   - Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels tels que :

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n + a_{n+1} f_{n+1} = 0. \tag{XXIII.1}$$

Comme $f_k'' = -k^2 f_k$, en dérivant deux fois (XXIII.1), on obtient :

$$0^2 a_0 f_0 - 1^2 a_1 f_1 - \cdots - n^2 a_n f_n - (n+1)^2 a_{n+1} f_{n+1} = 0. \tag{XXIII.2}$$

En formant $(n+1)^2$(XXIII.1)+(XXIII.2), on a :

$$\left((n+1)^2 - 0\right) a_0 f_0 + \cdots + \left((n+1)^2 - n^2\right) a_n f_n = 0. \tag{XXIII.3}$$

D'après $\mathcal{P}_n$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre, donc tous les coefficients de la combinaison linéaire (XXIII.3) sont nuls.

Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\left((n+1)^2 - k^2\right) a_k = 0$, donc $a_k = 0$. La relation (XXIII.1) devient $a_{n+1} f_{n+1} = 0$. Donc $a_{n+1} = 0$, car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

Donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!], a_k = 0$.

On a montré que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_{n+1})$ est libre.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

◇ On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathrm{G}_n = \mathrm{vect}\,(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ et $\mathrm{F}_n = \mathrm{vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

   D'après les questions précédentes, ces deux espaces sont de dimension $n+1$. Il suffit de montrer une inclusion.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. En notant $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k (\cos(\theta))^k = \cos(n\theta).$$

   Ce résultat signifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k g_k = f_n$ *i.e.* $f_n \in \mathrm{G}_n$.

   Comme la suite des espaces $(\mathrm{G}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, on a $f_k \in \mathrm{G}_n$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

   Donc $\mathrm{F}_n = \mathrm{vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n) \subset \mathrm{G}_n$. En conclusion, $\mathrm{F}_n = \mathrm{G}_n$.