Probabilités et espaces vectoriels

1. Donner une famille génératrice de $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -x+y+z = y-x = 0\}$.

   $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. C'est une droite vectorielle.

2. X et Y s'entraînent au tir à l'arc.

   X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur trois.

   (a) Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

   Notons C l'événement « la cible est atteinte », J_X (resp. J_Y) « le joueur est X (resp. Y) ».

   Par la formule des probabilités totales, on a :

   $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_{J_X}(C)\mathbb{P}(J_X) + \mathbb{P}_{J_Y}(C)\mathbb{P}(J_Y) = \frac{9}{10}\times\frac{1}{3} + \frac{6}{10}\times\frac{2}{3} = \frac{7}{10}.$$

   (b) L'un des joueurs a atteint la cible. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

   On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_C(J_Y)$.

   Par la formule de Bayes, on a :

   $$\mathbb{P}_C(J_Y) = \frac{\mathbb{P}(J_Y)}{\mathbb{P}(C)}\mathbb{P}_{J_Y}(C) = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{7}.$$

   (c) En déduire la probabilité qu'il s'agisse de X.

   $\mathbb{P}_C(J_X) = 1 - \mathbb{P}_C(J_Y) = \dfrac{3}{7}$.

3. Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

   Montrer que $A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

   Par mutuelle indépendance, A_1, ..., A_p, $\overline{A_{p+1}}$, ..., $\overline{A_p}$ sont mutuellement indépendants.

   Les événements $A = A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $B = \overline{A_{p+1}} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$.

   On en déduit que $A = A_1 \cap \ldots \cap A_p$ et $\overline{B} = A_{p+1} \cup \ldots \cup A_n$ sont indépendants.

Probabilités et espaces vectoriels

1. Donner une famille génératrice de $\mathrm{F} = \left\{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; -x+y+z = y+z = 0\right\}$.

   $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. C'est une droite vectorielle.

2. X et Y s'entraînent au tir à l'arc.

   X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10. Y joue deux fois sur trois.

   (a) Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?

   Notons C l'événement « la cible est atteinte », $\mathrm{J_X}$ (resp. $\mathrm{J_Y}$) « le joueur est X (resp. Y) ».

   Par la formule des probabilités totales, on a :

   $$\mathbb{P}(\mathrm{C}) = \mathbb{P}_{\mathrm{J_X}}(\mathrm{C})\mathbb{P}(\mathrm{J_X}) + \mathbb{P}_{\mathrm{J_Y}}(\mathrm{C})\mathbb{P}(\mathrm{J_Y}) = \frac{9}{10}\times\frac{1}{3} + \frac{6}{10}\times\frac{2}{3} = \frac{7}{10}.$$

   (b) L'un des joueurs a atteint la cible. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de X ?

   On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J_X})$.

   Par la formule de Bayes, on a :

   $$\mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J_X}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{J_X})}{\mathbb{P}(\mathrm{C})}\mathbb{P}_{\mathrm{J_X}}(\mathrm{C}) = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{7}{10}}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{7}.$$

   (c) En déduire la probabilité qu'il s'agisse de Y.

   $\mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J_Y}) = 1 - \mathbb{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{J_X}) = \frac{4}{7}$.

3. Soient A_1, ..., A_n des événements mutuellement indépendants et $p \in [\![1\,;n-1]\!]$.

   Montrer que $\mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_p$ et $\mathrm{A}_{p+1} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n$ sont indépendants.

   Par mutuelle indépendance, $\overline{\mathrm{A}_1}$, ..., $\overline{\mathrm{A}_p}$, A_{p+1}, ..., A_p sont mutuellement indépendants.

   Les événements $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}_1} \cap \ldots \cap \overline{\mathrm{A}_p}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{p+1} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n$ sont donc aussi indépendants.

   On en déduit que $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_p$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{p+1} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n$ sont indépendants.