Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Exercice 1 –

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sqrt{3}\sin(x)-3}{2\cos(x)-1}$.

3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et en 0 de
$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. (a) Montrer que la fonction f d'expression $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une expression.
   (b) Préciser la position locale de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Exercice 2 –

On note $\mathrm{E}=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour $f\in\mathrm{E}$ on pose, pour tout réel x :
$$\varphi(f)(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Pourquoi φ est-elle bien définie ?

2. Soit $f\in\mathrm{E}$. Justifier que $\varphi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(f)'=\varphi(f)+f$.

3. Justifier que $\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

4. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\{f\in\mathrm{E}\mid f(0)=0\}$.
   (b) Soit $f\in\mathrm{E}$ tel que $f(0)=0$. Montrer que $\varphi(f')=\varphi(f)+f$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)=\{f\in\mathrm{E}\mid f(0)=0\}$.

5. Étudier l'injectivité de φ. L'application φ est-elle surjective ?

6. (a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^\star$. Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_\lambda):\ \lambda y'-(\lambda+1)y=0$.
   (b) On note S_λ l'ensemble des solutions de (E_λ).
   Montrer que $\ker(\varphi-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})\subset\mathrm{S}_\lambda$.
   (c) Montrer que $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ker(\varphi-\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})=\{0_\mathrm{E}\}$.