Analyse asymptotique et espaces vectoriels

Correction de l'exercice 1 –

1. On a :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = \frac{x\sqrt{1+x} - \ln(1+x)}{x\sqrt{1+x}\,\ln(1+x)}.$$

Par équivalents usuels :

$$x\sqrt{1+x}\,\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

De plus :

$$x\sqrt{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) = x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right),$$

donc

$$x\sqrt{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Ainsi, par quotient :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\right) = 1.$$

2. La limite de $\dfrac{\sqrt{3}\sin(x) - \frac{3}{2}\cos(x) - 1}{\frac{3}{2}\cos(x) - 1}$ en $\dfrac{\pi}{3}$ n'avait aucun intérêt puisque la fonction y est définie.

La limite intéressante à déterminer pour un élève attentif était $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sqrt{3}\,\sin(x) - 3}{2\cos(x) - 1}$.

Pour celle-ci, posons $x = \dfrac{\pi}{3} + h$. En utilisant le formulaire de trigonométrie, on a :

$$\frac{2\sqrt{3}\,\sin(x) - 3}{2\cos(x) - 1} = \frac{3(\cos(h) - 1) + \sqrt{3}\sin(h)}{\cos(h) - 1 - \sqrt{3}\sin(h)}.$$

On constate alors que :

$$3(\cos(h) - 1) + \sqrt{3}\sin(h) = \sqrt{3}h + \mathrm{o}\left(h\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{3}h,$$

et de même :

$$\cos(h) - 1 - \sqrt{3}\sin(h) \underset{x\to 0}{\sim} -\sqrt{3}h.$$

Par quotient :

$$\frac{3(\cos(h) - 1) + \sqrt{3}\sin(h)}{\cos(h) - 1 - \sqrt{3}\sin(h)} \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\sqrt{3}\,\sin(x) - 3}{2\cos(x) - 1} = -1.$$

3. Étude en $+\infty$: On a :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1/2}-2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}+1\right).$$

En posant $x=\frac{1}{h}$, on a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1/2}-2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}+1&=(1+2h)^{-1/2}-2(1+h)^{-1/2}+1\\&=\frac{3}{4}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\\&\underset{x\to 0}{\sim}\frac{3}{4}h^2.\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Étude en 0 : Puisque :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right)=-\frac{3}{2}\quad\text{et}\quad\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty,$$

on en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. (a) Posons $x=\frac{1}{h}$. On a :

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1+2h}{1+h}}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+2h}{1+h}}&=\sqrt{1+2h}\times\frac{1}{\sqrt{1+h}}\\&=\left(1+h-\frac{1}{2}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\\&=1+\frac{1}{2}h-\frac{5}{8}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x)=\frac{1}{h}+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}h+\mathrm{o}\left(h\right),$$

donc

$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\frac{5}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{1}{2}+\mathrm{o}\left(1\right)$$

Ainsi, $y=x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

(b) Comme on a également :

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{5}{8x},$$

on en déduit que la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 2 –

1. Puisque $f \in \mathrm{E}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}f(t)$ est continue. L'intégrale $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. Donc $\varphi(f)(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
2. Par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}f(x)$. Ainsi,
$$\varphi(f)'(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = \varphi(f)(x) + f(x).$$
3. Par linéarité de l'intégrale, φ est linéaire. On montre par récurrence que $\varphi(f) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
4. (a) Soit $h \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$.
   Alors, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t$, donc $h(0) = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0\}$.
   (b) Si $f(0) = 0$, alors $\varphi(f') = \varphi(f) + f$ (par intégration par parties).
   (c) Donc, pour $f \in \mathrm{E}$ tel que $f(0) = 0$, on a $f = \varphi(f' - f)$. Ainsi $f \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$.
   Par double inclusion : $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = 0\}$.
5. Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors $\varphi(f) = 0$, donc $\varphi(f)' = 0$. Or $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$, donc $f = 0$. Donc $\ker(\varphi) = \{0\}$. Ainsi φ est injective mais non surjective car $\mathrm{Im}\,(\varphi) \neq \mathrm{E}$.
6. (a) Résolvons (E_λ) : $\lambda y' - (\lambda+1)y = 0$. Ses solutions sont :
$$\mathrm{S}_\lambda = \{x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\frac{(\lambda+1)x}{\lambda}},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}.$$
   (b) Si $f \in \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$, alors $\varphi(f) = \lambda f$. Donc $\varphi(f)' = \lambda f'$.
   Or $\varphi(f)' = \varphi(f) + f$, donc $\lambda f' - (\lambda+1)f = 0$. Ainsi $f \in \mathrm{S}_\lambda$.
   Donc $\ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) \subset \mathrm{S}_\lambda$.
   (c) — Si $\lambda = 0$, déjà vu : $\ker(\varphi) = \{0\}$.
   — Si $\lambda \neq 0$, et $f \in \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E})$, alors $f \in \mathrm{S}_\lambda$ et $f(0) = 0$ (car $\varphi(f)(0) = 0$). Donc f est nécessairement nulle.

   Ainsi $\ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \{0\}$.