

## Probabilités et Dimension finie

**Exercice 1** – Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

**Exercice 2** – Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

On pose  $F = \{f \in E, f(1) = f(0) = 0\}$  et  $G$  l'ensemble des fonctions affines sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on définit  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  .

$$x \mapsto e^{kx}$$

On pose  $E = \text{vect}(\{f_0, f_1, f_2, f_3\})$ .

2. Démontrer que pour tout  $f \in E$ ,  $f'' - 3f' + 2f \in E$ .
  3. On note  $\Psi : E \rightarrow E$  .
- $$f \mapsto f'' - 3f' + 2f$$

Montrer que  $\Psi \in \mathcal{L}(E)$ .

4. Démontrer que la famille  $(f_0, f_1, f_2, f_3)$  est libre.
5. Déterminer  $U = \ker \Psi$ .  
Que peut-on en déduire pour  $\Psi$  ?
6. Déterminer  $W = \ker(\Psi - 2\text{Id}_E)$ .
7. Vérifier que  $U$  et  $W$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 3** (★) – On lance une pièce équilibré.

Quelle est la probabilité d'obtenir Face-Face pour la première fois au  $n$ -ième lancer ?