Probabilités et Dimension finie

Correction de l'exercice 1 –

1. Il y en a autant que de parties à 6 éléments parmi un ensemble à 49 soit $\binom{49}{6} = \dfrac{49!}{6!43!} = 13\ 983\ 816$.
2. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons.

   Par exemple :

   $$| \bullet \bullet || \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet\bullet |$$

   les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14.

   On considère l'événement contraire : on ne veut pas de cloisons consécutives.

   Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes.

   Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes.

   Il y a $\dfrac{(38-1+7)!}{38!6!} = \dfrac{44!}{38!6!} \simeq 7,059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

   D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs :

   $$1 - \frac{\frac{44!}{38!6!}}{\binom{49}{6}} \simeq 0{,}495\ 2.$$

   Presque une chance sur deux !

Correction de l'exercice 2 –

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E},\ f(1) = f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.
   - F et G sont des sev de E. AQT.
   - Pour la somme directe, on procède par double inclusion. $\supset$ est immédiate.

     Pour établir $\subset$, on prend une fonction $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Elle est affine et s'annule en 0 et en 1. Elle est donc nulle. CQFD.
   - Pour montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, on procède encore par double inclusion. $\subset$ est immédiate.

     Soit maintenant $\phi \in \mathrm{E}$. Montrons qu'on a $\phi = f + g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. Une analyse mène à $g : x \longmapsto \phi(0) + [\phi(1) - \phi(0)]x$ et $f = \phi - g$.

     On peut alors vérifier que :
     - $\phi = f + g$,
     - $f \in \mathrm{F}$,
     - $g \in \mathrm{G}$.

     Donc, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.
2. Soit $f \in \mathrm{E}$. Il existe quatre réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $f = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k$.

Probabilités et Dimension finie

Alors en ayant remarqué que $f_k' = kf_k$ et $f_k'' = k^2 f_k$, on a

$$f'' - 3f' + 2f = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k k^2 f_k - 3\sum_{k=0}^{3} \lambda_k k f_k + 2\sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k = \sum_{k=0}^{3} (k^2 - 3k + 2)\lambda_k f_k \in \mathrm{E}$$

$$\forall\, f \in \mathrm{E}, \quad f'' - 3f' + 2f \in \mathrm{E}.$$

3. On vient de voir que Ψ est bien définie : si $f \in \mathrm{E}$, on a bien $f'' - 3f' + 2f \in \mathrm{E}$.
   - Soit $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

     Par linéarité de la dérivation, on a :

     $$\Psi(\lambda f+g) = (\lambda f+g)'' - 3(\lambda f+g)' + 2(\lambda f+g) = \lambda(f''-3f'+2f)+(g''-3g'+2g) = \lambda\Psi(f)+\Psi(g).$$

     On en déduit que Ψ est **linéaire**.
   - Comme son ensemble de définition est égal à son ensemble d'arrivée, Ψ est un **endomorphisme**.

$$\text{Donc, } \Psi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}).$$

4. Supposons que $\sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k = 0$. Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0$.

   On a donc, en faisant tendre x vers $-\infty$, et par unicité de la limite : $\lambda_0 = 0$.

   Il reste $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0$ et donc en simplifiant par $e^x \neq 0$:

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 e^{2x} = 0.$$

   On fait tendre x vers $-\infty$, et on aboutit à $\lambda_1 = 0$.

   On réitère le raisonnement, et on trouve $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   $$\text{La famille } (f_0, f_1, f_2, f_3) \text{ est libre. C'est donc une base de E.}$$

5. Déterminons $\mathrm{U} = \ker \Psi$. Soit $f \in \mathrm{E}$.

   $$f \in \mathrm{U} \iff f \in \ker \Psi \iff \Psi(f) = 0 \iff f'' - 3f' + 2f = 0$$

   On résout cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

   Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.

   $$\text{Donc, } \mathrm{U} = \mathrm{vect}\,(f_1, f_2).$$

   On en déduit que Ψ **n'est pas injective**.
6. Soit $\mathrm{W} = \ker\,(\Psi - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

   $$f \in \mathrm{W} \iff f \in \ker\,(\Psi - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \iff \Psi(f) - 2f = 0 \iff f'' - 3f' = 0$$

Il s'agit à nouveau d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique est $r^2 - 3r = 0$, de solutions 0 et 3.

$$\text{Donc, } \mathrm{W} = \mathrm{vect}\,(f_0, f_3).$$

7. On a vu que (f_0, f_1, f_2, f_3) était une base de E.

D'après le théorème de la base adaptée, $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) \oplus \mathrm{vect}\,(f_0, f_4) = \mathrm{E}$ *i.e.* U et W sont supplémentaires dans E.

Correction de l'exercice 3 – On note T le rang du premier motif FF.

Pour $n \geqslant 2$, l'événement $\{\mathrm{T} = n\}$ signifie que les deux derniers lancers $n-1$, n valent FF et aucune occurrence de FF n'apparaît dans les $n-2$ premiers lancers.

Le $n-2^{\text{ème}}$ lancer doit être P *i.e.* à l'issue des $n-2$ premiers lancers, on ne doit pas avoir de FF et il doit se terminer par P. On note donc P_m le nombre de lancers de longueur m ne contenant pas FF et se terminant par P.

On a donc $\forall\, n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = \dfrac{\mathrm{P}_{n-2}}{2^n}$.

Il reste à calculer P_m :

— On a déjà $\mathrm{P}_1 = 1 = \mathrm{P}_2 = 1$ car seul FP convient.

— Pour $m \geqslant 2$ une suite de longueur m finissant par P s'obtient de deux manières :

1. soit on prend une suite de longueur $m-1$ sans FF finissant par P et on lui ajoute P. Il y en a P_{m-1} par définition.
2. soit on prend une suite de longueur $m-1$ sans FF finissant par F et on lui ajoute P. De telles suites sont autant que celle de longueur $m-2$ finissant par P car elle ne peuvent finir par FF. Il y en a donc P_{m-2} par définition.

Finalement,

$$\forall\, m \geqslant 2,\ \mathrm{P}_m = \mathrm{P}_{m-1} + \mathrm{P}_{m-2}.$$

On sait alors que $\mathrm{P}_m = \mathrm{F}_{m+1} = \dfrac{\varphi^{m+1} - \psi^{m+1}}{\sqrt{5}}$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$ son conjugué.

Commentaires : *Rien à voir ici mais à retenir,* $\mathrm{F}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En conclusion,

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(\mathrm{T} = n) = \frac{\mathrm{F}_{n-1}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi\sqrt{5}} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Faut pas jouer à ce jeu !!!!