Chapitre

XXVI Intégration

CONTENU

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on considère deux réels a et b tels que $a < b$.

L'intervalle $[a\,;b]$ est donc non trivial.

I/ Fonctions en escalier

I.1 Subdivision

Définition 1 : On appelle *subdivision* du segment $[a\,;b]$ toute suite finie de réels $s = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$

Le *pas de la subdivision* est l'écart maximum entre deux termes :

$$\max_{k \in [\![0,n-1]\!]} (a_{k+1} - a_k).$$

L'*image de la subdivision* est l'ensemble $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$.

Remarques :

- Si s est une subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$ alors s contient les réels a et b.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on dit que s_1 est plus fine que s_2, noté $s_1 < s_2$, si s_1 contient au moins tous les termes de la subdivision s_2.
- Si s_1 et s_2 sont deux subdivisions de l'intervalle $[a\,;b]$, on peut définir la subdivision réunion de s_1 et s_2, notée $s_1 \vee s_2$, comme la subdivision de $[a\,;b]$ contenant tous les termes des subdivisions de s_1 et s_2.

  On remarquera qu'elle est plus fine que s_1 ET s_2.

Définition 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *subdivision régulière* de $[a\,;b]$, la subdivision $s = (a_0,\, a_1, \ldots, a_n)$ définie par :

$$\forall\, k \in [\![0\,;n]\!]\,,\ a_k = a + k \times \frac{b-a}{n}.$$

En particulier, pour une subdivision régulière, $\forall\, k \in [\![0\,;n-1]\!]$,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}.$$

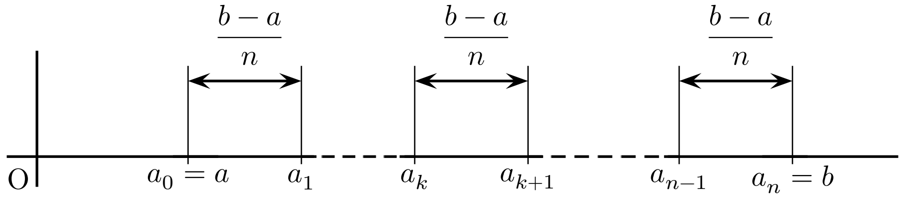


Figure XXVI.1 – Subdivision régulière d'un intervalle $[a\,;b]$

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

I.2 Fonctions en escalier

Définition 3 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$.

— On dit que f est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$:

$$\exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ tels que } f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathbb{1}_{]a_k;a_{k+1}[}.$$

On note $\mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$ leur ensemble.

— On dit alors que la *subdivision* est adaptée à f.

Toute fonction en escalier f vient donc avec au moins une subdivision adaptée à f.

Remarques :

— On parle aussi de fonction *constante par morceaux*.

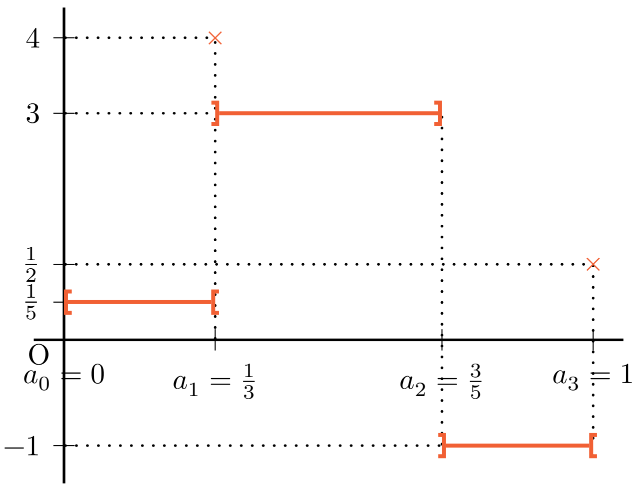
— **Aucune** condition n'est imposée aux valeurs de $f(a_k)$ mais une subdivision adaptée contient nécessairement tous les points de discontinuité de f.

— Une fonction en escalier est bornée.

En effet, elle prend un nombre fini de valeurs.

Une fonction prenant un nombre fini de valeurs est-elle nécessairement en escalier ?

— Il existe une infinité de subdivisions adaptées à une fonction en escalier : il suffit d'intercaler des termes à la suite.



$$f : \begin{array}{ccl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right[\\ 4 & \text{si } x = \frac{1}{3} \\ 3 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{3}\,;\frac{3}{5}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left]\frac{3}{5}\,;1\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

Figure XXVI.2 – Exemple de fonction en escalier sur $[0\,;1]$.

Exemples 1 :

— Une fonction constante est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à toute subdivision de $[a\,;b]$.

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

— La fonction partie entière est en escalier sur tout segment $[a\,;b]$ relativement à la subdivision de $[a\,;b]$ constituée de a, b et de tous les entiers du segment $[a\,;b]$.

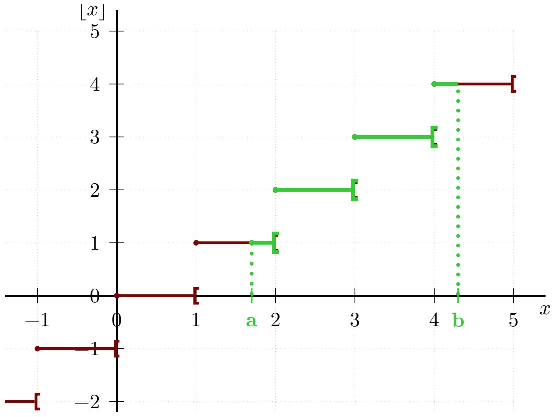


Figure XXVI.3 – La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a\,;b]$.

Proposition 1 :
Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, alors il existe une subdivision adaptée à f et g.

Proposition 2 :
Soient f, et g en escalier sur $[a\,;b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, les fonctions $f+g$, αf, fg, et $|f|$ sont en escalier sur $[a\,;b]$.

Corollaire 2.1 :
L'ensemble $\left(\mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})\,;+_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\,;\cdot_{\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})}\right)$ est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

II/ Intégrale des fonctions en escalier

II.1 Construction

Définition/Théorème 4 : Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ et $s\,:\, a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note λ_k la valeur prise par f sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On définit :

$$\mathrm{I}_s(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\lambda_k.$$

Alors, $\mathrm{I}_s(f)$ est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

On appelle *intégrale de f sur $[a\,;b]$*, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre $\mathrm{I}_s(f)$:

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\lambda_k.$$

Exemple 2 : Si la fonction f est constante et prend la valeur λ sur $[a\,;b]$, son intégrale est $\displaystyle\int_{[a;b]} f = (b-a)\lambda$. C'est l'aire algébrique du rectangle de longueur $b-a$ et de largeur λ.

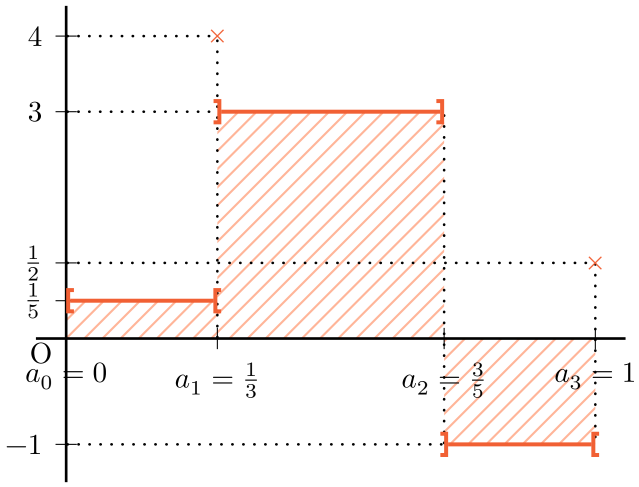


Figure XXVI.4 – Exemple d'intégrale d'une fonction en escalier avec la fonction de la figure XXVI.2.

Remarques :

- La valeur de f en chaque a_k n'intervient pas.
- Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $(a_{k+1}-a_k)\lambda_k$ est l'aire « algébrique » du rectangle de base $a_{k+1}-a_k > 0$ et de hauteur λ_k.

  Cette aire est négative ou positive suivant le signe de λ_k.
- L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est la somme des aires algébriques des rectangles formés par la fonction en escalier avec l'axe des abscisses.

  On retrouve le fait que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ corresponde à l'aire algébrique du domaine compris entre $(\mathrm{O}x)$, $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation : $x=a$ et $x=b$.

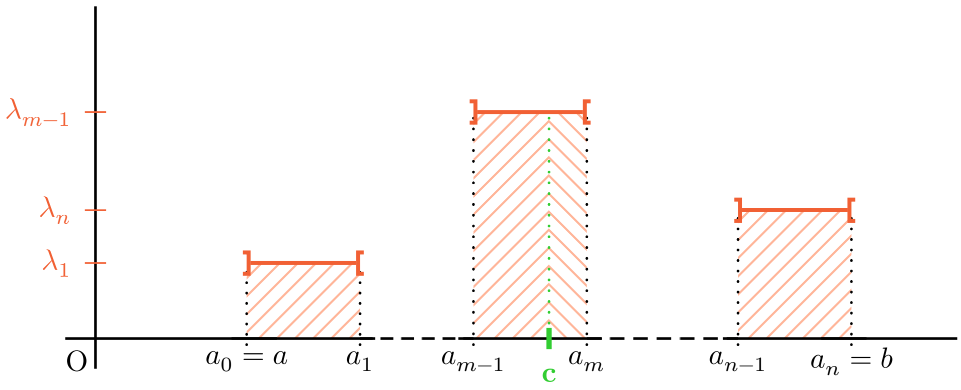


Figure XXVI.5 – L'intégrale de f est inchangée sur une subdivision plus fine.

Exemple 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{[0;n]} \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $[0,4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt$.
2. Soit $x \in [0,4]$, calculer $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,4]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,4]$?

II.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 3 :
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Linéarité : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Relation de Chasles : $\forall\, f \in \mathcal{E}([a\,;b]\,;\mathbb{R}),\ \forall\, c \in]a\,;b[$.

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

Positivité : $\forall\, f \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\forall\, x \in [a\,;b]\,,\, f(x) \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

En particulier,

Croissance : $\forall\, f,\, g \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$, $\forall\, x \in [a\,;b]$,

$$f(x) \geqslant g(x) \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est **croissante**.

Inégalité triangulaire : $\forall\, f \in \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right)$.

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est donc une forme linéaire.

II.3 Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Théorème 4 ($\mathcal{E}([a\,;b]) \to \mathscr{C}^0([a\,;b])$ - Admis) :

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0\left([a\,;b]\,;\mathbb{R}\right), \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}),\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon. \tag{XXVI.1}$$

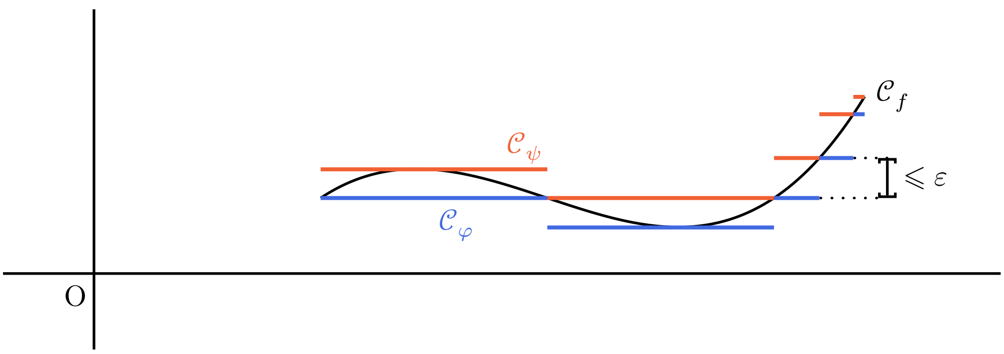


Figure XXVI.6 – Approximation d'une fonction continue par deux fonctions en escalier.

III/ Intégrale d'une fonction continue sur un segment

III.1 Construction

Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Notons :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \Big(0 \leqslant y \leqslant f(x) \text{ ou } f(x) \leqslant y \leqslant 0\Big) \right\}.$$

Si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ alors les nombres $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \psi$ donnent intuitivement des approximations par défaut et excès de l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$.

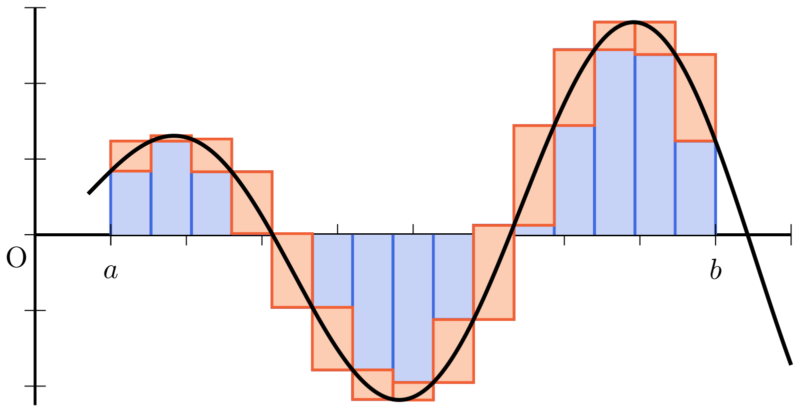


Figure XXVI.7 – Encadrement $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi$.

Pour définir l'aire de $\mathcal{D}$, on est ainsi conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) = \Big\{\psi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, f \leqslant \psi\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) = \Big\{\varphi \in \mathcal{E}([a\,;b]) \,/\, \varphi \leqslant f\Big\}.$$

Ensembles des fonctions en escaliers sur $[a\,;b]$ qui majorent et minorent f sur $[a\,;b]$.

Théorème 5 :
Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :

- $\mathrm{I}^-_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne supérieure $\mathscr{I}$.
- $\mathrm{I}^+_{f,[a;b]} = \left\{ \displaystyle\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) \right\}$ admet une borne inférieure $\mathcal{I}$.

De plus, $\mathscr{I} = \mathcal{I}$.

Définition 5 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$, notée $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, le nombre réel défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)\right\}.$$

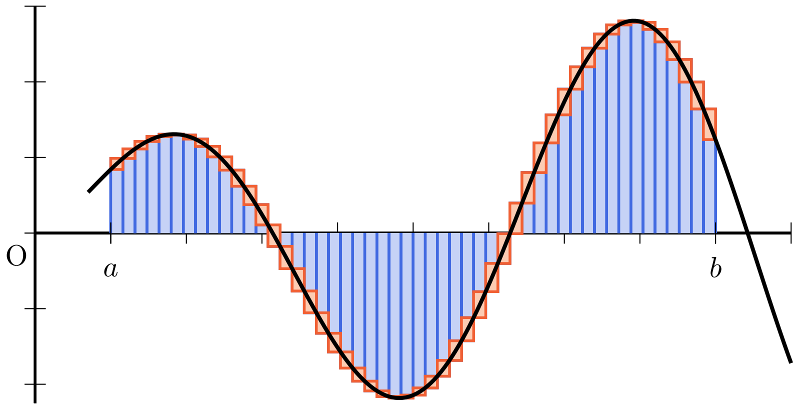


Figure XXVI.8 – Pour f continue sur $[a\,;b]$,
$$\int_{[a;b]} f = \sup\left\{\int_{[a;b]} \varphi \,/\, \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a;b]} \psi \,/\, \psi \in \mathcal{E}^+_{[a;b]}(f)\right\}.$$

Interprétation géométrique : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ est l'aire algébrique du domaine $\mathcal{D}$ du plan situé entre le graphe de f, l'axe des abscisses (comptée positivement lorsque le graphe est au dessus de l'axe $(\mathrm{O}x)$, négativement en dessous) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

— Les fonctions pour lesquelles $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]} = \inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ sont dites *intégrables au sens de Riemann sur* $[a\,;b]$ ou Riemann-intégrables.

— Pour toute fonction continue f sur $[a\,;b]$ et toute subdivision σ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a\,;b]$, on peut poser :

$$\mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x).$$

On appelle alors *sommes de Darboux* inférieure $\mathrm{L}_{f,\sigma}$ et supérieure $\mathrm{U}_{f,\sigma}$ de f selon σ, les réels :

$$\mathrm{L}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{f,\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\mathrm{M}_i.$$

Par construction, $\mathrm{L}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^-_{f,[a;b]}$ et $\mathrm{U}_{f,\sigma} \in \mathrm{I}^+_{f,[a;b]}$.

— Ce théorème prouve que les que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

— Il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann non continues, par exemple les fonctions en escalier.

— Il existe des fonctions non intégrables au sens de Riemann. Par exemple, l'indicatrice de $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

est non intégrable car ses sommes de Darboux inférieures et supérieures seraient nécessairement respectivement égales à 0 et 1.

— Si f est une fonction en escalier, $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ se trouve à la fois dans $\mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et dans $\mathrm{I}^+_{[a;b]}$.

Donc la valeur commune de $\sup \mathrm{I}^-_{[a;b]}$ et $\inf \mathrm{I}^+_{[a;b]}$ n'est autre que $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Les deux définitions de l'intégrale (pour une fonction en escalier, et pour une fonction continue) sont cohérentes.

Méthode 1 (Montrer qu'une fonction est Riemann-Intégrable) :
Pour justifier l'existence d'une intégrale, il suffit donc de dire c'est celle d'une fonction en escalier, ou d'une fonction continue sur un segment, ou se prolonge par continuité sur un segment.

Exemple 4 : L'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ a un sens mais $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ n'en a pas (cette année...).

III.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

Proposition 6 (Linéarité) :
Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} \alpha f + g = \alpha \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g.$$

Remarque : L'application $\displaystyle\int : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a;b]} f \end{array}$ est désormais aussi une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

Proposition 7 (Relation de Chasles) :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ et $c \in [a\,;b]$.

Alors :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Notations : Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f$ si $a < b$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b;a]} f$ si $a > b$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b et c quelconques.

Corollaire 7.1 :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Proposition 8 (Relation d'ordre) :

Positivité de l'intégrale : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0. \tag{XXVI.2}$$

Croissance de l'intégrale : Soient f, $g \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

Inégalité triangulaire : Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|\,.$$

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

On considère $\mathrm{P}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le signe de $\mathrm{P}(\lambda)$.
2. En déduire que $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Peut-on offrir une réciproque à l'implication (XXVI.2) ? La réponse est oui mais à une condition.

Théorème 9 :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R}_+)$ une fonction continue à valeurs **positives**.

$$\int_{[a;b]} f = 0 \iff f = 0_{\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R}_+)}.$$

ATTENTION

Faux pour les fonctions *non positives* comme sin sur $[0, 2\pi]$ ou *non continues* comme

$$\begin{array}{rccl} \delta_0 : & [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (Prélude à l'année prochaine) : Montrer que l'application $\cdot \mid \cdot$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} \cdot \mid \cdot : & \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f\,;g) & \longmapsto & f \mid g = \displaystyle\int_{[a;b]} fg \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

III.3 Inégalité de la moyenne

Proposition 10 :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b]\,,\mathbb{R})$.

$$m \leqslant f \leqslant \mathrm{M} \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \mathrm{M}(b-a). \tag{XXVI.3}$$

D'un point de vue graphique, l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est encadrée par l'aire des deux rectangles inférieur et supérieur.

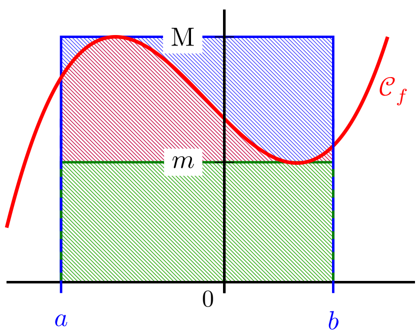


Figure XXVI.9 – Inégalité de la moyenne.

Théorème 11 (Valeur moyenne d'une fonction) :
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;b])$.

Alors il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c). \tag{XXVI.4}$$

Le nombre $\mu = f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est alors appelé la *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$.

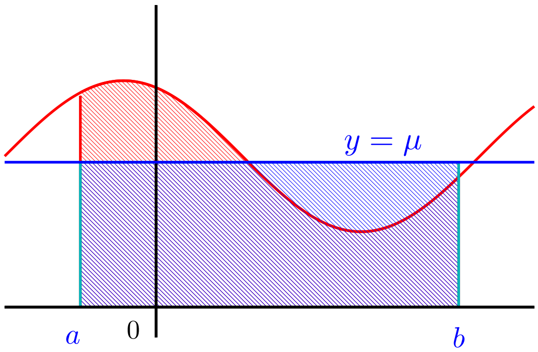


Figure XXVI.10 – Le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle bleu dont les côtés ont pour mesures $b - a$ et μ.

IV/ Intégration et Dérivation

IV.1 Théorème Fondamental de l'analyse

Théorème 12 (Théorème Fondamental de l'analyse) :
Soit f une fonction continue sur un *intervalle* I, et $a \in \mathrm{I}$.

Alors la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Corollaire 12.1 :
Toutes les fonctions continues admettent des primitives.

Remarques :

— La primitive d'une fonction continue est de classe $\mathscr{C}^1$ par définition.

— Le théorème ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Par exemple, la fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $[0, 2]$.

⌊0⌋. La valeur moyenne de f est comprise entre son minorant et son majorant.

ATTENTION Cela ne contredit en rien le fait que la fonction partie entière soit intégrable. Le théorème fondamental donne juste une condition suffisante d'existence d'une primitive. Cette condition n'est même pas nécessaire vue la remarque suivante.

— Il existe toutefois des fonctions non continues ayant des primitives.

Exemple 5 : La fonction $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $g: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}$ n'est pas continue (en 0).

La fonction g admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ sans y être continue.

IV.2 Calcul d'intégrales

Théorème 13 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in \mathrm{I}$.

Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Notation : On note $= \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b$ la quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ainsi,
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).}$$

Exemple 6 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$

Corollaire 13.1 :
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Exercice 4 : Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Calculer la dérivée de $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

IV.3 Intégration par parties

Théorème 14 :
Soient u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Soient $a, b, \in$ I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 7 : $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 5 : Soient $x > 1$ et $\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{F}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{F}_n(x)$.
2. En déduire la valeur de $\mathrm{F}_n(x)$.

IV.4 Changement de variables

Théorème 15 :
Soient :

— f une fonction continue sur J ;
— ϕ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I tel que $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$;
— $a, b \in$ J.

Alors :

$$\int_a^b \phi'(t) f(\phi(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode 2 (Changement de variables dans la pratique) :

1. On dit qu'on pose $x = \phi(t)$, et on vérifie que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
2. On a $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. On n'oublie pas de changer les bornes : lorsque t varie de a à b, x varie de $\phi(a)$ à $\phi(b)$.

$$\int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f(x)}\,\underbrace{\phi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

Exemple 8 : Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

La fonction f est une fraction rationnelle ne possédant pas de pôles réels donc bien définie et au moins continue sur $[0\,;1]$.

Une mise sous forme canonique du dénominateur $1+x+x^2 = \dfrac{3}{4} + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ encourage à effectuer le changement de variables

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}.$$

1. Posons $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$.

   Lorsque $x \in [0\,;1]$, $t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.

   Le changement de variable $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}$ est fonction affine de t donc clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\sqrt{3}\right]$.
2. $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$.
3. D'où,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2} \\ &= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Corollaire 15.1 (Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques) :
Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle considéré.

1. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Si $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Si $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et T-périodique $(\mathrm{T} > 0)$ alors pour tous réels a, b on a :

$$\int_{a+\mathrm{T}}^{b+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

V/ Formules de Taylor

V.1 Théorème de Taylor-Lagrange

Théorème 16 :
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Remarque : Pour $n = 0$, on retrouve le *théorèmes des accroissements finis.*

Corollaire 16.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) :
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a la majoration :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \mathrm{M}_{n+1} \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \text{avec } \mathrm{M}_{n+1} = \sup_{x\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Exemple 9 : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f : x \longmapsto \exp(zx)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est $x \longmapsto z^n \exp(zx)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0\,;1]$ s'écrit :

$$\left|f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|=\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|z^{n+1}\exp(zx)\right|.$$

En notant $z=a+\mathrm{i}\,b$, on obtient $|\exp(zx)|=\exp(ax)\leqslant\exp(|a|)$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$.

On en déduit :

$$\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|a|)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

D'où le résultat.

Exercice 7 : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $\mathrm{M}=\sup\{|f'(x)|,\ x\in[a,b]\}$.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\mathrm{M}\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

V.2 Formule de Taylor avec reste intégral (Hors-Programme)

Théorème 17 (Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace) :
Soit $n\in\mathbb{N}$.

Pour toute fonction $f:[a\,;b]\longmapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La formule de Taylor avec reste intégral, est la seule formule de Taylor à donner une expression précise du reste. Elle est très utile lorsqu'on s'intéresse à la régularité de ce dernier comme on le verra plus loin.

Le théorème (17) permet de redémontrer très facilement l'inégalité du corollaire (16.1) :

Exemple 10 (Une application aux inégalités) : Montrons que :

$$\forall\,x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin(x)\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au sinus (clairement de classe $\mathscr{C}^5$) à l'ordre 4 entre 0 et un x quelconque de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $0\leqslant\displaystyle\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t=\frac{x^5}{120}$.

Donc, $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 8 : Montrer que pour tout $\geqslant 0$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exemple 11 (Une application aux suites) : La fonction exp est clairement de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Appliquée à l'ordre n sur l'intervalle $[0\,;1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$\begin{aligned}\exp(1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{e} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

V.3 Formule de Taylor-Young

Corollaire 17.1 :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ et tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

À retenir 1 :
- Contrairement au développement limité au voisinage de a où le reste n'est négligeable que localement dans le corollaire (17.1), la majoration du corollaire (16.1) est globale : elle est valide pour tous a, x d'un intervalle où f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et donne une majoration explicite du reste.
- L'expression explicite du reste sous la forme d'une intégrale est donnée par le théorème (17).

VI/ Sommes de Riemann

VI.1 Méthode des rectangles

Théorème 18 :
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{S}_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est une *somme de Riemann* associée à f sur $[a\,;b]$.

De plus, si $f\in\mathscr{C}^1([a\,;b])$, on a :
$$\left|\mathrm{S}_n-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\lambda\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Interprétation graphique : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, $\dfrac{b-a}{n}f(a_k)=(a_{k+1}-a_k)f(a_k)$ donc $\mathrm{S}_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ représente la somme des aires algébriques des rectangles R_k de base $a_{k+1}-a_k$ et de hauteur $f(a_k)$ pour k variant de 0 à $n-1$.

En d'autres termes, le théorème (18) affirme donc que pour une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, on a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{S}_n(f)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

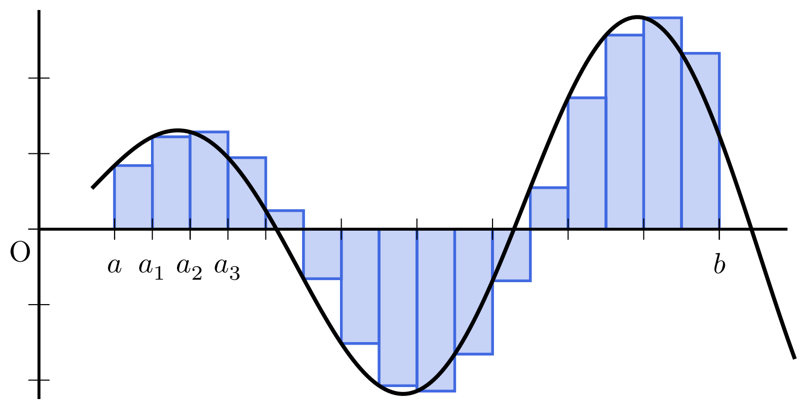


Figure XXVI.11 – Méthode des rectangles (à gauche).

```
def rectangle_gauche(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    sum_rectangles = 0.0
   for i in range(n):
        x_i = a + i * h  # Bord gauche de chaque sous-intervalle
        sum_rectangles += f(x_i)
   I = h * sum_rectangles
    return I
```

Figure XXVI.12 – Méthode des rectangles à gauche

Remarques : Dans la pratique, on se ramène toujours à l'intervalle $[0\,;1]$:

— Si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ alors :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— De même, on peut montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$ on a aussi :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Dans tous les cas, $\mathrm{S}_n(f)$ représente la moyenne des n valeurs prises par f en les x_k sur l'intervalle $[a\,;b]$ ou $[0\,;1]$.

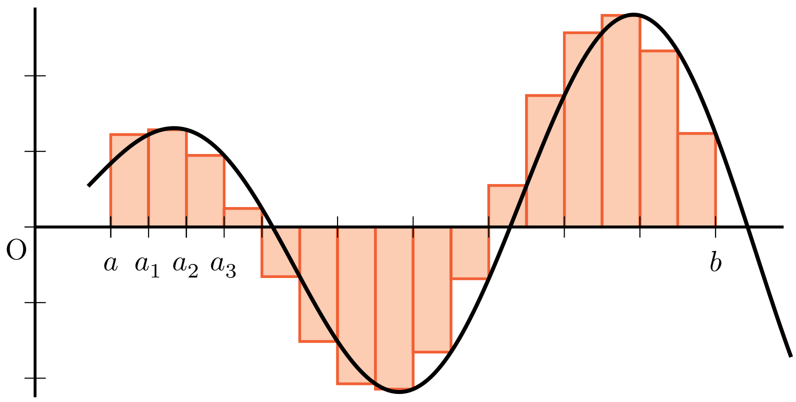


Figure XXVI.13 – Méthode des rectangles (à droite).

Exercice 9 : Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

Justifier qu'elles sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

VI.2 Méthode des trapèzes

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1}.

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}.$$

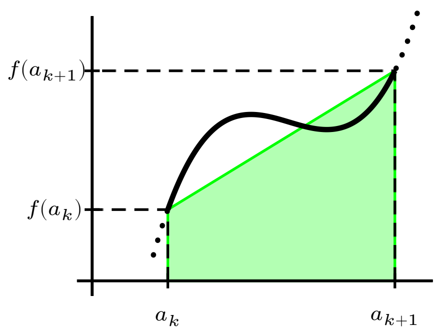


Figure XXVI.14 – Méthode des trapèzes.

Théorème 19 (Admis :-() :
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$).

Alors
$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f\in\mathscr{C}^2([a\,;b])$, $\left|\mathrm{T}_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_2\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $\mathrm{M}_2 = \sup\limits_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Le théorème (19) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{T}_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

```python
def trapeze_optimise(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)
    somme = 0.5 * (f_values[0] + f_values[-1])  # f(a) / 2 + f(b) / 2
    for i in range(1, n):
        somme += f_values[i]
    I = h * somme
    return I
```

Figure XXVI.15 – Méthode des trapèzes optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

VI.3 Méthode de Simpson

La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole).

Autrement dit, on effectue l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\mathrm{S}i_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}).$$

Théorème 20 (Totalement admis et (Hors-Programme)) :
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

Alors
$$\mathrm{S}i_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^4([a\,;b])$, $\left|\mathrm{S}i_n(f) - \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}_4\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$ où $\mathrm{M}_4 = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Le théorème (20) affirme donc que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{S}i_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$ [1]

[1]. Ça commence à être pas mal mais on a mieux...

CHAPITRE XXVI. INTÉGRATION

```python
def simpson_optimize(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        raise ValueError("Le nombre de sous-intervalles doit être pair
                    pour la méthode de Simpson.")
    h = (b - a) / n  # Largeur de chaque sous-intervalle
    x_values = [a + i * h for i in range(n + 1)]  # Calcul des valeurs x
    f_values = [f(x) for x in x_values]  # Stockage des valeurs de f(x)

    somme = f_values[0] + f_values[-1]  # f(a) + f(b)
   for i in range(1, n):
        if i % 2 == 0:
            somme += 2 * f_values[i]  # Termes pairs
        else:
            somme += 4 * f_values[i]  # Termes impairs
    I = (h / 3) * somme
    return I
```

Figure XXVI.16 – Méthode de Simpson optimisée en stockant les évaluations par f généralement « coûteuses ».

VII/ Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

VII.1 Définition

Définition 6 : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;b]$, noté $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{[a;b]} f$ le nombre complexe défini par :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}\,(f) + i \int_{[a;b]} \mathrm{Im}\,(f)$$

Exemple 12 : Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \end{array}$.

On a $\mathrm{Re}\,(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}$ et $\mathrm{Im}\,(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t). \end{array}$

D'où,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi} + \mathrm{i}\,[-\cos(t)]_0^{\pi} = 2\,\mathrm{i}\,.$$

VII.2 Propriétés

Globalement, on va conserver toutes les propriétés sauf celles liées à la relation d'ordre et à la borne supérieure absentes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 :
Soient f, $g : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$, $c \in [a\,;b]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Linéarité : $\displaystyle\int_{[a;b]} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;c]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[c;b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right|_{\mathbb{C}} \leqslant \int_{[a;b]} |f(t)|_{\mathbb{C}}\,\mathrm{d}t$.

Remarques :

— $\mathbb{C}$ n'étant pas doté d'une relation naturelle d'ordre, on ne retrouve pour les fonctions à valeurs complexes ni la propriété de positivité de l'intégrale, ni la croissance de l'intégrale.

— Les formules de l'intégration par parties, de changement de variable, et la formule de Taylor avec reste intégral se généralisent sans difficulté.

— La formule de Taylor-Lagrange dépendant du théorème de Rolle n'est plus valable mais l'inégalité, comme celle des accroissements finis, subsiste pour les fonctions à valeurs complexes.