

Intégration

I/ Primitives

Exercice 1 : Déterminer les fonctions f continues sur $[0; 1]$ vérifiant $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Exercice 2 : Soit f continue sur $[0; 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \mapsto \frac{5}{3x^2}$ sur $I = [-4; -1]$.

4. $f : x \mapsto x(3x^2 - 1)^2$ sur $I = [-1; 2]$.

2. $f : x \mapsto \frac{3}{5\sqrt{x}}$ sur $I = [1; 4]$.

5. $f : x \mapsto -3xe^{x^2-2}$ sur $I = [-1; 3]$.

6. $f : x \mapsto \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}}$ sur $I = [1; 4]$.

3. $f : x \mapsto 2e^x$ sur $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. $f : x \mapsto \frac{x^2}{(8-x^3)^2}$ sur $I = [0; 1]$.

Exercice 4 : Pour $x \in [0; 1[$, on définit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. En utilisant la concavité du logarithme, démontrer que :

$$\forall x \in]0; 1[, \forall t \in]x^2; 1], \quad \frac{2 \ln(x)}{x^2 - 1} (t - 1) \leq \ln(t) \leq t - 1.$$

2. En déduire que f se prolonge par continuité en 1.

3. Justifier que f est dérivable sur $[0; 1]$, et calculer sa dérivée.

4. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{(t-1)}{\ln(t)} dt$.

Exercice 5 : On considère la fonction F définie sur $J =]1; +\infty[$ par

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

1. Étudier le sens de variation de F sur J .
2. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\ln(t))^2}$ sur $I =]1; +\infty[$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
3. En utilisant l'inégalité $0 < \ln(t) \leq t - 1$ pour $t \in I$, déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.

II/ Suites d'intégrales

Exercice 6 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $T_n(x) = \int_0^x \tan^n(t) dt$.

1. Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $T_{n+2}(x)$ et $T_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$).
3. En déduire $T_{2p}(x)$ et $T_{2p+1}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Calculer $A_1(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $A_{n+1}(x)$ et $A_n(x)$.
3. En déduire $A_n(x)$ pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 8 (Intégrales de Wallis) : Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} .
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_{n_0}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}$.
5. Calculer $nI_{n+1}I_n$.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n .

Exercice 9 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Calculer I_0 .
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-2} et I_n pour tout entier $n \geq 2$.
5. Démontrer que l'on a :

$$\forall p \geq 0, I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{2(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}.$$

Exercice 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue) :

1. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$.

2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

III/ Sommes de Riemann**Exercice 11 :** Déterminer la limite des suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$

3. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$

5. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2 + n^2}$

2. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$

4. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$

6. $\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$

7. $\frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.**Exercice 13 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut utiliser le théorème sur les sommes de Riemann.
2. En utilisant les variations de f sur $[0; 1[$, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}},$$

et

$$\forall k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket, \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3. En déduire un encadrement de u_n et conclure.

Exercice 14 : Calculer l'intégrale de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \dots, n$,

2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, \dots, n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a, b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b - a) \cdot \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Exercice 15 (Intégrale de Poisson) : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose

$$P(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta.$$

1. Vérifier l'existence de $P(x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire $P(x)$.

Aide : On pourra utiliser les sommes de Riemann.

IV/ Théorèmes de Taylor

Exercice 16 : En appliquant une inégalité de Taylor à $\ln(1+x)$, montrer que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 17 (Approximation de la dérivée seconde) : Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^4$.

Justifier l'existence de $M = \sup_{x \in [a; b]} |f^{(4)}(x)|$ puis montrer que

$$\forall t+h, t-h \in [a; b], |f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t)| \leq \frac{M}{12} h^4.$$