Intégration

I/ Primitives

Exercice 1 : Déterminer les fonctions f continues sur $[0\,;1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Correction : Si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t &\iff \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \iff \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\,\mathrm{d}t = 0\\ &\iff |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\iff f = |f| \iff f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leqslant 0$.

En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0\,;1]$.

Exercice 2 : Soit f continue sur $[0\,;1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Soit, pour $x \in [0\,;1]$, $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0\,;1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0\,;1]$ et d'intégrale nulle sur $[0\,;1]$, on sait que g est nulle.

Sinon, g change de signe sur $[0\,;1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois.

Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0\,;1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0\,;1]$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{5}{3x^2}$ sur $\mathrm{I} = [-4\,;-1]$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{3}{5\sqrt{x}}$ sur $\mathrm{I} = [1\,;4]$.
3. $f : x \longmapsto 2\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
4. $f : x \longmapsto x(3x^2-1)^2$ sur $\mathrm{I} = [-1\,;2]$.
5. $f : x \longmapsto -3x\,\mathrm{e}^{x^2-2}$ sur $\mathrm{I} = [-1\,;3]$.
6. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^3}{5\sqrt{x^4+2}}$ sur $\mathrm{I} = [1\,;4]$.
7. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{(8-x^3)^2}$ sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$.

Exercice 4 : Pour $x \in [0\,;1[$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. En utilisant la concavité du logarithme, démontrer que :
$$\forall\, x \in\,]0\,;1[\,,\ \forall\, t \in\,]x^2\,;1]\,,\quad \frac{2\ln(x)}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln(t) \leqslant t-1.$$
2. En déduire que f se prolonge par continuité en 1.
3. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;1]$, et calculer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t-1)}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. La fonction logarithme est concave. Sa courbe représentative est donc sous ses tangentes et sur ses cordes.

   Entre les points d'abscisse x^2 et d'abscisse 1, elle est donc en dessous de la tangente en 1 et au dessus de la corde reliant $(x^2, \ln(x^2))$ à $(1, \ln 1)$.

   L'équation de la tangente est donnée par la fonction $t \longmapsto t-1$ et celle de la corde par la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(x^2)-\ln 1}{x^2-1}(t-1)$.

   On en déduit exactement le résultat demandé.
2. On va passer à l'inverse et intégrer cette inégalité. Il faut simplement prendre garde que $x^2 \leqslant x$.

   On a donc, pour $x < 1$ et $t \in [x^2, x] \subset [x^2, 1]$,
$$\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln(t)} \leqslant \frac{x^2-1}{2\ln(x)} \times \frac{1}{t-1}.$$
   Par croissance de l'intégrale, l'ordre des inégalités est changé car $x^2 \leqslant x$, et on trouve :
$$\int_x^{x^2} \frac{x^2-1}{2\ln(x)} \times \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1},$$
   soit
$$\frac{x^2-1}{2\ln(x)}\left(\ln\left|x^2-1\right| - \ln|x-1|\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left|x^2-1\right| - \ln|x-1|.$$

Comme $\ln\left|x^2-1\right| = \ln|x-1| + \ln(x+1)$, on obtient enfin :

$$\frac{(x-1)}{\ln(x)} \times \frac{(x+1)\ln(x+1)}{2} \leqslant f(x) \leqslant \ln(x+1).$$

Il suffit de passer à la limite pour prouver que f tend vers $\ln(2)$ lorsque x tend vers 1.

On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln(2)$.

3. Posons pour $x \in [0\,;1[$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

   Comme primitive d'une fonction continue, F est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$

   De plus, $f(x) = \mathrm{F}\left(x^2\right) - \mathrm{F}(x)$ entraîne que f est elle-aussi dérivable sur $[0\,;1[$, et la question précédente a prouvé qu'elle était continue en 1.

   Sa dérivée sur $]0\,;1[$, vaut alors :

$$f'(x) = 2x\mathrm{F}'(2x) - \mathrm{F}'(x) = \frac{2x}{\ln\left(x^2\right)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

   D'après la ligne précédente, f' admet une limite lorsque x tend vers 1 (à savoir 1). Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est aussi dérivable en 1 avec $f'(1) = 1$.

4. Il suffit de remarquer que, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ d'après les deux questions précédentes. D'après le théorème fondamental, on a directement :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \ln 2.$$

Exercice 5 : On considère la fonction F définie sur $\mathrm{J} =]1\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}.$$

1. Étudier le sens de variation de F sur J.
2. En utilisant la décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ sur $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. En utilisant l'inégalité $0 < \ln(t) \leqslant t-1$ pour $t \in \mathrm{I}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \mathrm{F}(x)$.

Correction :

1. Soit a un élément de J. On introduit $f(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. On peut remarquer que

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^{v(x)} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u(x)} h(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x)) - f(u(x)).$$

   Par composition, F est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\mathrm{F}'(x) = v'(x)f'(v(x)) - u'(x)f'(u(x)) = v'(x)h(v(x)) - u'(x)h(u(x)).$$

2. Par composition, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et sa dérivée vaut

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{2x}{(\ln(x^2))^2} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = \frac{x-2}{2(\ln(x))^2}.$$

On en déduit que F est décroissante sur $]1,2]$, puis croissante sur $[2,+\infty[$.

3. Pour $x \in \mathrm{J}$, on a $x \leqslant x^2$.

De plus, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ est décroissante sur l'intervalle $[x, x^2]$.

On en déduit que pour tout $x \in [x, x^2]$,

$$\frac{1}{(\ln(x)^2)^2} \leqslant \frac{1}{(\ln(t))^2} \leqslant \frac{1}{(\ln(x))^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, et, par croissance de l'intégrale, on trouve

$$\frac{x^2-x}{(\ln(x)^2)^2} \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \frac{x^2-x}{(\ln(x))^2}.$$

Par croissance comparée du logarithme et des fonctions puissance, on en déduit que F tend vers $+\infty$ si x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty.$$

4. D'après l'inégalité indiquée par l'énoncé, on sait que, pour tout $t > 1$,

$$\frac{1}{(\ln(t))^2} \geqslant \frac{1}{(t-1)^2}.$$

On intègre cette inégalité entre x et x^2, pour $x \in \mathrm{I}$ (remarquons qu'on a bien alors $x \leqslant x^2$), et on trouve :

$$\mathrm{F}(x) \geqslant \left[\frac{-1}{t-1}\right]_x^{x^2} = \frac{x}{x^2-1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$, le théorème de comparaison nous donne finalement :

$$\lim_{x\longmapsto1^+} \mathrm{F}(x) = +\infty.$$

II/ Suites d'intégrales

Exercice 6 : On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{T}_n(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^n(t)\,dt$.

1. Calculer $\mathrm{T}_0(x)$, $\mathrm{T}_1(x)$, $\mathrm{T}_2(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{T}_{n+2}(x)$ et $\mathrm{T}_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$.
3. En déduire $\mathrm{T}_{2p}(x)$ et $\mathrm{T}_{2p+1}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Intégration

Correction :

1.
   - $T_0(x) = \displaystyle\int_0^x dt = x.$
   - $T_1(x) = \displaystyle\int_0^x \tan(t)\,dt = -\ln|\cos(x)|.$
   - $T_2(x) = \displaystyle\int_0^x \tan^2(t)\,dt = \int_0^x (1+\tan^2(t))\,dt - \int_0^x dt = \tan(x) - x.$
2. Les fonctions $x \longmapsto \tan^n x$ et $x \longmapsto \tan^2 x$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il suffit d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(x) &= \int_0^x \tan^{n+2}(t)\,dt \\
&= \int_0^x \tan^n(t) \times \tan^2(t)\,dt \\
&= \int_0^x \underbrace{\tan^n(t)}_{\downarrow} \times \overbrace{(1+\tan^2(t))}^{\uparrow}\,dt - \int_0^x \tan^n(t)\,dt \\
&= \Big[\tan^n(t) \times \tan(t)\Big]_0^x - \int_0^x n(1+\tan^2(t))\tan^{n-1} t \times \tan(t)\,dt - T_n(x) \\
&= \tan^{n+1}(x) - n\left(T_n(x) + T_{n+2}(x)\right) - T_n(x) \\
&= \tan^{n+1}(x) - (n+1)T_n(x) - nT_{n+2}(x)
\end{aligned}$$

Donc, $(n+1)T_{n+2}(x) = \tan^{n+1}(x) - (n+1)T_n(x)$.

$$T_{n+2}(x) = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x) - T_n(x).$$

Avec un peu d'intuition, on pouvait également tenter une approche plus directe :

$$\begin{aligned}
T_n(x) + T_{n+2}(x) &= \int_0^x \tan^n(t)\,dt + \int_0^x \tan^{n+2}(t)\,dt \\
&= \int_0^x (\tan^n(t) + \tan^{n+2}(t))\,dt \\
&= \int_0^x (1+\tan^2(t))\tan^n(t)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(t)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)
\end{aligned}$$

On retrouve bien :

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x).$$

3. Il suffit de regrouper les résultats des deux questions précédentes :
   - $T_2(x) = \tan(x) - x.$
   - $T_4(x) = \dfrac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x.$
   - $T_6(x) = \dfrac{1}{5}\tan^5(x) - \dfrac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) - x.$

- Il est aisé de montrer par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{T}_{2p}(x) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1}}{2k+1} \tan^{2k+1} x \right) + (-1)^p x.$$

De même pour les termes indices impairs :

- $\mathrm{T}_1(x) = -\ln|\cos(x)|$.
- $\mathrm{T}_3(x) = \dfrac{1}{2}\tan^2(x) + \ln|\cos(x)|$.
- $\mathrm{T}_5(x) = \dfrac{1}{4}\tan^4(x) - \dfrac{1}{2}\tan^2(x) - \ln|\cos(x)|$.
- $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{T}_{2p+1}(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{p+k}}{2k} \tan^{2k}(x) \right) + (-1)^{p+1} \ln|\cos(x)|$.

Exercice 7 : On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{A}_1(x)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{A}_{n+1}(x)$ et $\mathrm{A}_n(x)$.
3. En déduire $\mathrm{A}_n(x)$ pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 8 (Intégrales de Wallis) : Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n+1}$.
5. Calculer $n\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n$.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

Correction :

1. Par IPP, $\mathrm{I}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n$.
2. $\mathrm{I}_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = 1$ et

$$\mathrm{I}_{2p} = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}\mathrm{I}_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \frac{2p\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times(2p-1)\times\cdots\times 1}\mathrm{I}_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

3. En regardant l'intégrande.
4. D'après la question précédente, $0 < \mathrm{I}_{n+2} \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$ donc

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{\mathrm{I}_{n+2}}{\mathrm{I}_n} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1$$

par conséquent $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

5. $(2p-1)I_{2p-1}I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p}\dfrac{\pi}{2}$ et $2pI_{2p}I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}\dfrac{\pi}{2}$.

   En conclusion, $nI_nI_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{2}$, ce qui peut aussi se démontrer par récurrence.

   Commentaires : *Comme* $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$, *on peut aussi démontrer que* $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ *en montrant montrant que* $\dfrac{(n+2)I_{n+2}I_{n+1}}{(n+1)I_{n+1}I_n} = 1$ i.e. *que la suite* $\Big((n+1)I_{n+1}I_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante à son premier terme* $1\times I_1I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$, $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_nI_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{2}$.

   On en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,dx$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant I_n\leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-2} et I_n pour tout entier $n\geqslant 2$.
5. Démontrer que l'on a :

$$\forall\, p\geqslant 0,\ I_{2p} = (-1)^p\frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\frac{2(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}.$$

Exercice 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue) :

1. On suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0$.
2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Correction :

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda>0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\lambda}\left(-\left[\cos(\lambda t)f(t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right)\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt\right).$$

Intégration

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2. Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f=1$, car pour $\lambda>0$, $\displaystyle\left|\int_a^b \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| = \ldots \leqslant \frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a,b]$ telle que

$$\forall\, x\in[a,b],\ |f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Pour $\lambda>0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en escaliers,

$$\exists \mathrm{A}>0/\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda>\mathrm{A}\Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda>\mathrm{A}$, on a alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\,\varepsilon>0, \exists \mathrm{A}>0/\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda>\mathrm{A}\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon),$$

et donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

III/ Sommes de Riemann

Exercice 11 : Déterminer la limite des suites suivantes définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'idée est toujours la même : on commence par arranger un petit peu la somme, on reconnaît la somme de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle (souvent $[0\,;1]$) et on conclut avec le théorème précédent. Voyons cela en pratique :

1. En posant $f : x \longmapsto x$ continue sur $[0\,;1]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
2. En posant $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ continue sur $[0\,;1]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$
3. En posant $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ continue sur $[0\,;1]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$
4. En posant $f : x \longmapsto \sin(x)$ continue sur $[0\,;\pi]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.$$
5. En posant $f : x \longmapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ continue sur $[0\,;1]$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
En conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k^2+n^2} = \int_0^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2).$
6. Ce n'est pas une somme de Riemann. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,
$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

Intégration

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\,\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\,\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$. Or, $\dfrac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\dfrac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\dfrac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$.

Correction : Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\sqrt{k}-1 \leqslant \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor \leqslant \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ étant continue sur $[0\,;1]$, la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ converge donc vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor = \frac{3}{2}$.

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut utiliser le théorème sur les sommes de Riemann.
2. En utilisant les variations de f sur $[0\,;1[$, montrer que :

$$\forall\, k \in [\![1\,;n-1]\!]\,,\ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}},$$

et

$$\forall\, k \in [\![0\,;n-2]\!]\,,\ \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire un encadrement de u_n et conclure.

Correction :

1. Tout d'abord, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$.

   La somme u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0\,;1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. Exit le théorème de Riemann.
2. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

   Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $\forall\, x \in \left[\dfrac{k-1}{n}\,;\dfrac{k}{n}\right]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}$.

   Par croissance de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} dx = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}$.

   Pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$: $\forall\, x \in [\frac{k}{n}\,;\frac{k+1}{n}]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Par croissance de l'intégrale, on obtient, $\displaystyle\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
3. En sommant la seconde inégalité précédente pour $k=0$ à $n-2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} &\leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} &\leqslant \int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
u_n &\leqslant \arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}.
\end{aligned}$$

   Et en sommant la première inégalité précédente pour $k=1$ à $n-1$, on a aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \\
\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\leqslant u_n \\
\arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) &\leqslant u_n.
\end{aligned}$$

   Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right)\underbrace{-\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

Intégration

Quand n tend vers $+\infty$, par continuité de arcsin en 1, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 14 : Calculer l'intégrale de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$ sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, ..., n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, ..., n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a, b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Correction :

1. On calcul d'abord $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$. Par le théorème de Riemann-Darboux c'est la limite de
$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot f(x_k).$$
Pour $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ (on obtient en fait un somme de Riemann) :
$$\mathrm{S}_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{i\pi}{2n}})^k.$$
Ce qui est une somme géométrique de somme $\mathrm{S}_n = (1-i)\dfrac{\frac{\pi}{2n}}{1-e^{i\frac{\pi}{2n}}}$. La limite de ce taux d'accroissement est $1+i$ (en posant $u = \frac{\pi}{2n}$ et en remarquant que $\frac{e^{iu}-1}{u} \to i$ quand $u \to 0$). Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = 1+i$. Mais $e^{it} = \cos t + i\sin t$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt = 1+i$. Par identification des parties réelles et imaginaires on trouve : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = 1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt = 1$.
2. On veut $x_k = aq^k$ ce qui donne bien $x_0 = a$, mais il faut aussi $x_n = b$ donc $aq^n = b$, donc $q^n = \frac{b}{a}$ soit $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$. Nous cherchons la limite de $\mathrm{S}'_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot g(x_k)$. Il est n'est pas trop dur de montrer que $\mathrm{S}'_n = n(q-1)$. Pour trouver la limite quand $n \to +\infty$ c'est plus délicat car q dépend de n : $\mathrm{S}'_n = n(q-1) = n((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}-1) = n(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}}-1)$. En posant $u = \frac{1}{n}$ et en remarquant que l'on obtient un taux d'accroissement on calcule : $\mathrm{S}'_n = \frac{1}{u}(e^{u\ln\frac{b}{a}}-1) \to \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$. Donc $\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$.

3. à l'aide des sommes géométrique est des taux d'accroissement on trouve

$$\int_a^b \alpha^t \, dt = \frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Exercice 15 (Intégrale de Poisson) : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose

$$\mathrm{P}(x) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) d\theta.$$

1. Vérifier l'existence de $\mathrm{P}(x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser $\mathrm{X}^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En déduire $\mathrm{P}(x)$.

Aide : On pourra utiliser les sommes de Riemann.

IV/ Théorèmes de Taylor

Exercice 16 : En appliquant une inégalité de Taylor à $\ln(1+x)$, montrer que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 17 (Approximation de la dérivée seconde) : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^4$.

Justifier l'existence de $\mathrm{M} = \sup\limits_{x \in [a;b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$ puis montrer que

$$\forall\, t+h, t-h \in [a\,;b]\,,\ \left|f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) - h^2 f''(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{12} h^4.$$