Dimension finie et intégration (révisions)

1. En posant $u = \arctan(x)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Posons $u = \arctan(x)$, alors $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

   On obtient :
   $$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}.$$

2. Soit $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
   (a) Donner J_0 et J_1.

   $\mathrm{J}_0 = \mathrm{e} - 1$ et $\mathrm{J}_1 = 1$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n pour $n \geqslant 0$.
   $$\mathrm{J}_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\mathrm{J}_n.$$

3. Soient $(e_1, \dots e_n) \in \mathrm{E}^n$, $p \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{vect}\,(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
   (a) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont génératrices (de F et G respectivement) et si $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$, alors $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est génératrice de E.

   confer cours.

   (b) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre alors $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe.

   confer cours.

Dimension finie et intégration (révisions)

1. En posant $u = \ln(x)$, calculer $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2(x)}$.

   Posons $u = \ln(x)$, alors $du = \dfrac{dx}{x}$.

   On obtient :

$$\int_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2(x))} = \Big[\arctan(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $J_n = \displaystyle\int_1^{e} \ln(t)^n\, dt$.

   (a) Donner J_0 et J_1.

   $J_0 = e - 1$ et $J_1 = 1$.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n pour $n \geqslant 0$.

$$J_{n+1} = e - (n+1)J_n.$$

3. Soient $(e_1, \dots e_n) \in E^n$, $p \in [\![1\,;n]\!]$, $F = \text{vect}\left(e_1, \dots, e_p\right)$ et $G = \text{vect}\left(e_{p+1}, \dots, e_n\right)$.

   (a) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont libres et si F+G est directe, alors $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre.

   confer cours.

   (b) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E alors $F + G = E$.

   confer cours.

Dimension finie et intégration (révisions)