

Probabilités et Dimension finie

1. Probabilités

- Définition d'un univers, d'un évènement, d'un évènement élémentaire, d'une issue.
- Définition d'une probabilité sur un univers fini et d'un espace probabilisé.
- Évènements impossibles/négligeables, certains, incompatibles.
- Probabilité du complémentaire, de l'union, croissance de la probabilité.
- Système complet d'évènements. Distribution de probabilités.
- Existence et unicité d'une probabilité définie sur les singletons uniquement.
- Probabilité uniforme/équiprobable. Définition, calcul d'une probabilité d'un évènement à l'aide des cardinaux.
- Probabilité conditionnelle. Définition de $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A | B)$. L'application \mathbb{P}_B est une probabilité sur Ω .
- Formule des probabilités composées, des probabilités totales. Formule de Bayes
- Indépendance : définition pour deux évènements. Indépendance et indépendance mutuelle pour une famille d'évènements.

2. Espaces Vectoriels de dimension finie

Les notions générales liées aux espaces vectorielles doivent bien entendu encore être connues. En revanche on se concentrera sur les méthodes propres aux espaces vectoriels de dimension finie.

- Définition d'un espace de dimension finie.
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Existence d'une base en dimension finie.
- Toutes les bases d'un même espace ont le même cardinal. Définition de la dimension.
- Lien entre le cardinal et le caractère libre, générateur.
- Sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien avec le caractère libre, générateur.
- Dimension de la somme, formule de Grassmann. Caractérisation d'espaces supplémentaires avec la dimension. Existence d'un supplémentaire.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. (★) Théorème dit, de fondation d'une probabilité sur un univers fini.
2. Soient (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur Ω .

$$B \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

3. Une famille de polynômes non nuls échelonnées par les degrés est libre.
4. Théorème de la base incomplète
5. Théorème de la base extraite.
6. (★) Formule de Grassmann
7. Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.