

Dimension finie 2

Commentaires : *Je vous ai senti paniqués alors je vous ai vite tapé la correction. À peine relue donc peut-être pas exempte de fautes.*

Exercice 1 : Vrai ou faux ...

1. Dans $\mathbb{K}^4$, $ax + by + cz + dt = 0$ avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ est une équation définissant un sous-espace vectoriel de dimension 3
2. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np
3. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
4. La transposée de AB est $A^T B^T$
5. Pour toute matrice carrée A , $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$
6. Pour toutes matrices carrées d'ordre p , A et B et tout naturel n , $(AB)^n = A^n B^n$
7. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \circ v = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$.
8. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie a un cardinal supérieur ou égal à toute famille libre.
9. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
10. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

Correction :

1. V : C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On verra que c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ donc de dimension 3.
2. V : *confer cours*.
3. F : $I_n - I_n = 0_n$ n'est pas inversible.
4. F : *confer cours*.
5. F : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$.
6. F : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
et
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
7. F : C'est l'inclusion réciproque qui est vraie.

Contre-exemple : Soit $E = \text{vect}(e_1, e_2)$ un espace de dimension 2. En particulier (e_1, e_2) est libre.

Posons $u : E \rightarrow E$ et $v : E \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccc} e_1 & \mapsto & e_1 \\ e_2 & \mapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} e_1 & \mapsto & e_2 \\ e_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Alors, $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par construction.

Cependant, $\text{Im}(u) = \text{vect}(e_1) \not\subset \ker(v) = \text{vect}(e_2)$.

8. V : *confer cours*.
9. V : *confer cours prochain ou démontrez-le*.
10. V : *confer cours*.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z, t)$ tels que

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases} \text{ est un sous-espace vectoriel.}$$

En donner la dimension et une base.

Correction : Notons P cet ensemble. Solution d'un système linéaire homogène, on sait que c'est un espace vectoriel, sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

Pour en trouver une base, on résout le système :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) \in H &\Leftrightarrow \begin{cases} -5t + x + 3y - 2z = 0 \\ -t + x + 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5t + x + 3y - 2z = 0 \\ -4t + y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7t + x + 7z = 0 \\ -4t + y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7t - 7z \\ y = 4t + 3z \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. C'est un plan (mais pas un hyperplan).

Exercice 3 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Ces matrices forment-elles une famille libre ou une famille liée ?

Correction : Cinq matrices d'un ensemble de dimension 4 ? What's the joke ?

Exercice 4 : Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, la famille constituée par un polynôme P de degré n , ainsi que ses polynômes dérivés $P', P'', \dots, P^{(n)}$ est libre.

Correction : Comme $\deg(P) = n$, la famille $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une famille de polynômes non nuls étagée par les degrés donc libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5 : Prouver l'indépendance des familles de fonctions suivantes :

1. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_n(x) = \cos(nx)$
3. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_n(x) = \cos^n(x)$
4. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$

Correction : Toute la beauté de l'algèbre linéaire est que, même si la famille a l'air indexé sur $\mathbb{R}$, l'indépendance des familles ne repose que sur celle d'une famille finie (quelconque quand même).

1. Considérons $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, une combinaison linéaire finie nulle des f_α .

Égalité fonctionnelle qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer les α_i strictement ordonnés dans le sens croissant : $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. Ils ne peuvent être égaux sans que la famille ne soit liée.

En divisant par $e^{\alpha_n x} \neq 0$, comme $\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $e^{\alpha_i x} = o(e^{\alpha_n x})$ et par passage à la limite en $+\infty$, l'égalité étant conservée, on obtient $\lambda_n = 0$.

En itérant le raisonnement jusqu'à diviser par $e^{\alpha_1 x} \neq 0$, on obtient $\alpha_n = \dots = \alpha_1 = 0$. La famille est libre.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la famille $(\cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
 - ◇ Comme $f_0 \equiv 1$ n'est pas la fonction nulle, le résultat est clair pour $n = 0$.
 - ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la relation vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et considérons une combinaison linéaire nulle des f_i pour $i \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$:

Soient donc $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels tels que :

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n + a_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (\text{XXIV.1})$$

Comme $f_k'' = -k^2 f_k$, en dérivant deux fois (XXIV.1), on obtient :

$$0^2 a_0 f_0 - 1^2 a_1 f_1 - \dots - n^2 a_n f_n - (n+1)^2 a_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (\text{XXIV.2})$$

En formant $(n+1)^2(\text{XXIV.1}) + (\text{XXIV.2})$, on a :

$$((n+1)^2 - 0)a_0f_0 + \dots + ((n+1)^2 - n^2)a_nf_n = 0. \quad (\text{XXIV.3})$$

D'après $\mathcal{P}_n$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, donc tous les coefficients de la combinaison linéaire (XXIV.3) sont nuls.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $((n+1)^2 - k^2)a_k = 0$, donc $a_k = 0$.

La relation (XXIV.1) devient $a_{n+1}f_{n+1} = 0$. Donc $a_{n+1} = 0$, car f_{n+1} n'est pas la fonction nulle.

Donc pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $a_k = 0$ et la famille $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ est libre.

La propriété est donc héréditaire. Initialisée pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n a_k \cos^k(x) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ admet donc une infinité de racines i.e. tout le segment $[-1; 1]$ s'il faut préciser. Il est donc nul, donc tous ses coefficients sont nuls.

D'où $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

La famille $(\cos^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

4. Considérons une combinaison linéaire (finie) nulle des f_α :

$$a_1 f_{\alpha_1} + a_2 f_{\alpha_2} + \dots + a_n f_{\alpha_n} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$$

Si les a_i ne sont pas tous nuls, il en existe au moins un noté $a_k \neq 0$ sur lequel on peut pivoter et écrire :

$$a_k |x - \alpha_k| = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x - \alpha_i| \quad (\text{égalité de fonctions}).$$

La fonction de droite, qui peut être nulle est dérivable, en α_k donc celle de gauche aussi ce qui ne se pourra que si $a_k = 0$ et la contradiction.

Conséquence, tous les a_i sont nuls et la famille est libre.

Exercice 6 : Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{a,\alpha} : x \mapsto a \cos(x+\alpha)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

En donner une base.

Correction : Montrons que $T = \{f_{a,\alpha} \mid a, \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\cos, \sin)$ ce qui nous donnera le résultat.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{a,\alpha}(x) = a \sin(\alpha) \times \cos(x) - a \cos(\alpha) \times \sin(x) \in \text{vect}(\cos(x), \sin(x))$ donc $T \subset \text{vect}(\cos, \sin)$.

Réciproquement, soit $f = a \cos + b \sin \in \text{vect}(\cos, \sin)$. La clé est la transformation de Fresnel :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$a \cos(x) + b \sin(x) = a \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - ib \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{a - ib}{2} e^{ix} + \frac{a + ib}{2} e^{-ix}.$$

Notons $z = \frac{a + ib}{2} \neq 0$ et $r e^{-i\alpha}$ sa forme polaire.

$$= \bar{z} e^{ix} + z e^{-ix} = \bar{z} e^{ix} + \overline{\bar{z} e^{ix}} = 2\text{Re}(\bar{z} e^{ix})$$

$$= 2\text{Re}(r e^{i(x+\alpha)}) = \underbrace{2r}_A \cos(x + \alpha)$$

$$= A \cos(x + \alpha) \in T.$$

Donc $\text{vect}(\cos, \sin) \subset T$ et l'égalité.

En particulier, T est un sev de dimension 2 de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dont une base est la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$.

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E . Montrer que $f^n = 0$.

Correction : Soit p l'indice de nilpotence de f i.e. $f^p = 0$.

Si $p \leq n$ alors il est clair que $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$.

Supposons le contraire i.e. $p \geq n + 1$ tel que $f^{p-1} \neq 0$. Il existe donc un vecteur $v \in E$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$. Montrons que la famille $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est libre dans E .

Comme E est de dimension n , il contiendra alors une famille libre de cardinal $p > n$ ce qui est contradictoire.

Considérons donc une combinaison linéaire nulle des $f^i(v)$:

$$\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(v) = 0.$$

En composant cette égalité par f^{p-1} , on obtient :

$$\lambda_0 f^{p-1}(v) = 0 \implies \lambda_0 = 0 \text{ car } f^{p-1}(v) \neq 0.$$

En itérant ce raisonnement, $f^{p-1}(v) \neq 0$ entraîne successivement $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. La famille est libre et le résultat escompté.

Exercice 8 : Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$. Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Correction : $V = \ker(f - i\text{Id}_E)$ et $W = \ker(f + i\text{Id}_E)$ sont déjà des sev de E .

Comme, $\forall x \in E, ix = -ix \iff x = 0$, la somme directe l'est tout autant.

De plus, $\forall x \in E$, on peut écrire $x = \frac{ix + f(x)}{2i} + \frac{ix - f(x)}{2i}$.

Or, par linéarité de f et $f^2 = -Id_E$, on a aussi :

$$f\left(\frac{ix + f(x)}{2i}\right) = \frac{if(x) - x}{2i} = i \frac{ix + f(x)}{2i} \implies \frac{ix + f(x)}{2i} \in V.$$

Et

$$f\left(\frac{ix - f(x)}{2i}\right) = \frac{if(x) + x}{2i} = -i \frac{ix - f(x)}{2i} \implies \frac{ix - f(x)}{2i} \in W.$$

Les espaces V et W sont donc aussi générateurs de E donc ils y sont supplémentaires :

$$E = V \oplus W.$$

Exercice 9 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts tels que $(u - \alpha Id_E) \circ (u - \beta Id_E) = 0$.

Montrer que $E = \text{Ker}(u - \alpha Id_E) \oplus \text{Ker}(u - \beta Id_E)$.

Correction : On sait déjà que $\text{ker}(u - \alpha Id_E)$ et $\text{ker}(u - \beta Id_E)$ sont des sev de E .

Soit $x \in \text{ker}(u - \alpha Id_E) \cap \text{ker}(u - \beta Id_E)$. Par définition, $f(x) = \alpha x = \beta x$, ce qui n'est possible que si $x = 0$ car $\alpha \neq \beta$.

L'intersection des deux sev est donc réduite à $\{0\}$. La somme est directe.

Posons $P = \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha}$ et $Q = \frac{X - \beta}{\alpha - \beta}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors,

$$P + Q = 1 \implies P(u) + Q(u) = Id_E.$$

En particulier $\forall x \in E, x = P(u)(x) + Q(u)(x)$.

Reste à montrer que $P(u)(x) \in \text{ker}(u - \beta Id_E)$ et $Q(u)(x) \in \text{ker}(u - \alpha Id_E)$.

Or, en se rappelant que les polynômes d'endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent, on a :

$$\begin{cases} (u - \alpha Id_E)(Q(u)(x)) = \frac{1}{\alpha - \beta} (u - \alpha Id_E) \circ (u - \beta Id_E)(x) = 0 \implies Q(u)(x) \in \text{ker}(u - \alpha Id_E) \\ (u - \beta Id_E)(P(u)(x)) = \frac{1}{\beta - \alpha} (u - \alpha Id_E) \circ (u - \beta Id_E)(x) = 0 \implies P(u)(x) \in \text{ker}(u - \beta Id_E) \end{cases}$$

Les sev $\text{ker}(u - \alpha Id_E)$ et $\text{ker}(u - \beta Id_E)$ sont donc aussi générateurs de E :

$$E = \text{ker}(u - \alpha Id_E) + \text{ker}(u - \beta Id_E).$$

Avec la somme directe, on en déduit qu'ils y sont supplémentaires :

$$E = \text{ker}(u - \alpha Id_E) \oplus \text{ker}(u - \beta Id_E).$$

Commentaires : Vous remarquerez qu'il n'est nul besoin d'avoir E de dimension finie.

Exercice 10 : Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Correction :

1. Pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$ qui est stable par g .
2. Soit $y \in \text{Im}(f)$ i.e. $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Alors, $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$ qui est aussi stable par g .

Exercice 11 (Ensemble des quaternions) : Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$

de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$, avec $x, y \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que cet ensemble est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, stable par produit de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Calculer $M\bar{M}^T$ et en déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
3. (★) Identifier $\mathbb{C}$ à une partie de $\mathbb{H}$.

Correction :

1. D'après les lois de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et la compatibilité du conjugué avec les combinaisons linéaires, il est assez facile de voir que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

En effet, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in \mathbb{H}$, on a :

$$\lambda M + M' = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ -\bar{y}' & \bar{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda y + y' \\ -(\lambda \bar{y} + \bar{y}') & \lambda \bar{x} + \bar{x}' \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Soient $x = a + bi$ et $y = c + di$ deux complexes avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a :

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{H} = \text{vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Commentaires : Vous remarquerez que $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathbf{1}$ d'où le nom de « quaternions ».

Montrons que ces matrices sont libres sur $\mathbb{R}$ en considérant une combinaison linéaire **réelle** nulle de celles-ci :

$$\begin{aligned} & a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -(c + di) & a + bi \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a + bi = 0 \\ c + di = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0. \end{aligned}$$

La famille est libre. Elle forme donc une base de $\mathbb{H}$ qui est de dimension 4 (dans $\mathbb{R}$).

Enfin, soient $M, M' \in \mathbb{H}$.

$$MM' = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ -\bar{y}' & \bar{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - y\bar{y}' & xy' + \bar{x}'y \\ -(x'\bar{y} + \overline{xy'}) & -\bar{y}y' + \overline{xx'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ -\bar{t} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

en posant $z = xx' - y\bar{y}' \in \mathbb{C}$ et $t = xy' + \bar{x}'y \in \mathbb{C}$.

L'ensemble $\mathbb{H}$ est donc stable par produit.

Commentaires : On dit que c'est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$.

$$M\bar{M}^T = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} & -y \\ \bar{y} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & 0 \\ 0 & |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix} = (|x|^2 + |y|^2)I_2.$$

En remarquant que $M = 0_{\mathbb{H}}$ si, et seulement si $x = y = 0$ i.e. $|x|^2 + |y|^2 = 0$, tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{|x|^2 + |y|^2} \bar{M}^T.$$

3. L'application $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ est clairement linéaire et injective donc $\mathbb{C}$ est isomorphe à

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$$

son image $\text{Im}(\phi)$ qui est un sev de $\mathbb{H}$.