

Dimension finie 2

Exercice 1 : Vrai ou faux ...

1. Dans $\mathbb{K}^4$, $ax + by + cz + dt = 0$ avec $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ est une équation définissant un sous-espace vectoriel de dimension 3
2. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np
3. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
4. La transposée de AB est $A^T B^T$
5. Pour toute matrice carrée A , $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$
6. Pour toutes matrices carrées d'ordre p , A et B et tout naturel n , $(AB)^n = A^n B^n$
7. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \circ v = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$.
8. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie a un cardinal supérieur ou égal à toute famille libre.
9. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
10. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble des vecteurs $u = (x, y, z, t)$ tels que

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 5t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \end{cases} \quad \text{est un sous-espace vectoriel.}$$

En donner la dimension et une base.

Exercice 3 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Ces matrices forment-elles une famille libre ou une famille liée ?

Exercice 4 : Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, la famille constituée par un polynôme P de degré n , ainsi que ses polynômes dérivés P' , P'' , ..., $P^{(n)}$ est libre.

Exercice 5 : Prouver l'indépendance des familles de fonctions suivantes :

1. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_n(x) = \cos(nx)$
3. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_n(x) = \cos^n(x)$
4. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$

Exercice 6 : Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{a,\alpha} : x \mapsto a \cos(x+\alpha)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

En donner une base.

Exercice 7 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E . Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 8 : Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$. Soient $V = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.

Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Exercice 9 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts tels que $(u - \alpha \text{Id}_E) \circ (u - \beta \text{Id}_E) = 0$.

Montrer que $E = \text{Ker}(u - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \beta \text{Id}_E)$.

Exercice 10 : Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 11 (Ensemble des quaternions) : Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$ de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$, avec $x, y \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que cet ensemble est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, stable par produit de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Calculer $M\bar{M}^T$ et en déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
3. (★) Identifier $\mathbb{C}$ à une partie de $\mathbb{H}$.

Commentaires : *J'ai enlevé le dernier car on est encore trop petit pour le faire correctement.*