Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : On considère un espace probabilisé fini $(\Omega; \mathbb{P})$ et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Montrer que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.

Exercice 1 : Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

— $F = \{f \in E, f(1) = 0\}$;
— $G = \{f \in E, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Exercice 3 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : On considère un espace probabilisé fini $(\ \Omega ; \mathbb{P}\ )$ et A, B deux événements.

Prouver que : A et B sont indépendants si, et seulement si

1. $\bar{\mathrm{A}}$ et B,
2. A et $\bar{\mathrm{B}}$,
3. ou $\bar{\mathrm{A}}$ et $\bar{\mathrm{B}}$

le sont aussi.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;
— $\mathrm{G} = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 2 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 3 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Montrer qu'une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Soit l'univers $\Omega = [\![1, 2n]\!]$.

Peut-on trouver deux réels a, b tels que $\forall k \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = ak + b$ définisse une probabilité et que $\mathrm{P}([\![1, n]\!]) = \dfrac{1}{4}$?

Exercice 3 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Que peut-on dire de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$?

Exercice 1 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1,1,1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2 : Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 3 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

— Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Énoncer puis prouver le théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 2 : La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ?

Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Exercice 3 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Nom : ....   **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Existe-t-il toujours un supplémentaire en dimension finie ? Justifier votre réponse.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir *Pile* soit de $\frac{1}{3}$. Si on obtient *Pile*, on décide de jouer uniquement avec le dé A. Sinon, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^{\star}$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?