Probabilités et dimension finie

Question de cours : On considère un espace probabilisé fini $(\Omega; \mathbb{P})$ et A un événement tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.

Montrer que $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}$ est une probabilité.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;
— $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

— F et G sont des sev.
— $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{\mathrm{O}\}$ immédiat.
— On a $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \mapsto \phi(x) - \phi(1)x$ et $g : x \mapsto \phi(1)x$.

On a bien $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ et $\phi = f + g$. Donc $f \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 2 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction : Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{52}; \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}; \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$.

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ et donc les événements A et B sont indépendants.

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{52} = \dfrac{4}{13}$.

Exercice 3 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : $\mathrm{F}e$: «être femme», $\mathrm{L}u$: «porter des lunettes», H : «être homme»

Alors on a $\mathrm{P}(\mathrm{F}e) = 0.6$, $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e) = \dfrac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme.

De même, on a $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H}) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)$ avec $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e) + \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H})\mathrm{P}(\mathrm{H})$.

Application numérique : $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = 0.4$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)}{\mathrm{P}(\mathrm{L}u)} = 0.5$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : On considère un espace probabilisé fini $(\ \Omega;\mathbb{P}\ )$ et A, B deux événements.

Prouver que : A et B sont indépendants si, et seulement si

1. $\bar{\mathrm{A}}$ et B,
2. A et $\bar{\mathrm{B}}$,
3. ou $\bar{\mathrm{A}}$ et $\bar{\mathrm{B}}$

le sont aussi.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

— $\mathrm{G} = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

— F et G sont des sev.

— On a $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Soit $(x, y, z)\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tels que $(x, y, z) = f + g$.

Comme $f \in \mathrm{F}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$.

Comme $g \in \mathrm{G}$, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $f = (u+v, u+v, u)$.

$$(x, y, z) = f + g \iff \begin{cases} \alpha + u + v = x \\ 2\alpha + u + v = y \\ 3\alpha + u = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x + y \\ u = 3x - 3y + z \\ v = -x + 2y - z \end{cases}.$$

(x, y, z) est donc décomposable de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G. On en déduit que F et G sont en somme directe, et que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 2 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = pq$ car les maladies sont indépendantes.

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p + q - pq$

Exercice 3 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{S})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{A})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$$

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Montrer qu'une famille est liée si, et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Soit l'univers $\Omega = [\![1, 2n]\!]$.

Peut-on trouver deux réels a, b tels que $\forall k \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = ak + b$ définisse une probabilité et que $\mathrm{P}([\![1, n]\!]) = \dfrac{1}{4}$?

Exercice 3 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction :

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $\mathrm{P}(\mathrm{CB}/\mathrm{YB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB})\mathrm{P}(\mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{YB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB} \cap \mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{YB}) = \dfrac{0.15}{0.4} = 0.375$.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB} \cap \mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{CB}) = \dfrac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P}(\text{non}\mathrm{YB}/\mathrm{CB}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB}) = 0.4$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Que peut-on dire de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$?

Exercice 1 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

1. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

2. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x \\ a+c=y \quad (\mathrm{L}_2) \\ a+b=z \quad (\mathrm{L}_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x \quad (\mathrm{L}_1') \\ a+c=y \\ b-c=z-y \quad (\mathrm{L}_3') = (\mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y \quad (\mathrm{L}_1' + \mathrm{L}_3') \\ a+c=y \\ 2c = x-(z-y) \quad (\mathrm{L}_1' - \mathrm{L}_3') \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

   Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x, y, z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

3. La famille est libre et génératrice donc c'est une base.
4. Pour écrire $w = (1, 1, 1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x, y, z), en particulier pour le vecteur $(1, 1, 1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 2 : Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction : Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1 - 0.015 = 0.985$.

Exercice 3 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})/\mathrm{P}(\mathrm{T}^+)$ or $\mathrm{P}(\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M}) + \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{S})\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 0.95\cdot0.03 + 0.1\cdot0.97 = 0.125\,5$. D'où : $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 22.7\%$.
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{T}^+) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 77.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1 - \mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Énoncer puis prouver le théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Correction : Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.

La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Exercice 2 : La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ?

Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction : Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{G}),(\mathrm{F},\mathrm{F})\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{2}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \neq \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}, b \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}, c \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\{(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{F})\}) = \frac{6}{8}$; $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{4}{8}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}\{(\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{F},\mathrm{G}),\{(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{F})\} = \frac{3}{8}$. On a $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{3}{8} = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, et les événements A et B sont indépendants

Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \frac{2}{2^n}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1+n}{2^n}$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ si et seulement si $n = 3$.

Exercice 3 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction : Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8\,!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

1. Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $\mathrm{BMMMMMMM}$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a $7!$ permutations de ce type. Donc $\mathrm{P(A)} = \dfrac{7!}{8!} = \dfrac{1}{8}$, on s'en doutait !
2. De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $\mathrm{MBMMMMMM}$: il y en a encore $7\,!$, et la probabilité est la même.
3. Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Existe-t-il toujours un supplémentaire en dimension finie ? Justifier votre réponse.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir *Pile* soit de $\frac{1}{3}$. Si on obtient *Pile*, on décide de jouer uniquement avec le dé A. Sinon, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^{\star}$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction : Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20\,!$.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\dbinom{20}{2} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a $18!$ choix.

Il y a au total : $19\dbinom{20}{2}(18!)$ choix possibles.