Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :
- $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;
- $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Exercice 2 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Exercice 3 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Nom : ....   **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

L'application $\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_A : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array}$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère :

— $F = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

— $G = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 3 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Une famille de polynômes non nuls échelonnées par les degrés est libre.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Soit l'univers $\Omega = [\![1, 2n]\!]$.

Peut-on trouver deux réels a, b tels que $\forall k \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = ak + b$ définisse une probabilité et que $\mathrm{P}([\![1, n]\!]) = \dfrac{1}{4}$?

Exercice 3 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2 : Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 3 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

- Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
- Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice 2 : La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ?

Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Exercice 3 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Formule de Grassmann.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir *Pile* soit de $\frac{1}{3}$. Si on obtient *Pile*, on décide de jouer uniquement avec le dé A. Sinon, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 : On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0_2\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = 0_2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

   Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).
On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1. On obtient un « six » . Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a obtenu un « cinq » . Même question.

Exercice 3 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(2) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

Exercice 2 : On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x\cos x,\ f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x\sin x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 3 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité P(A) pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité P(B) pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité P(C) pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité P(D) pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème dit, de fondation d'une probabilité sur un univers fini.

Exercice 1 (Polynômes d'interpolation de Lagrange) : Soient a_0,..., a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et b_0,..., b_n $n+1$ nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall\,(i,j) \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{L}_i(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i \in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i) = b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice 2 : Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 3 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.