Probabilités et dimension finie

Question de cours : Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = 0\}$;

— $\mathrm{G} = \{f \in \mathrm{E}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

— F et G sont des sev.

— $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{\mathrm{O}\}$ immédiat.

— On a $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f : x \mapsto \phi(x) - \phi(1)x$ et $g : x \mapsto \phi(1)x$.

On a bien $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ et $\phi = f + g$. Donc $f \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 2 : Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction : Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{52}; \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ et donc les événements A et B sont indépendants.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Exercice 3 : Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Correction : Notons les différents événements : $\mathrm{F}e$: «être femme», $\mathrm{L}u$: «porter des lunettes», H : «être homme»

Alors on a $\mathrm{P}(\mathrm{F}e) = 0.6$, $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e) = \dfrac{1}{3}$; il s'agit de la probabilité conditionnelle «porter des lunettes» sachant que la personne est une femme.

De même, on a $\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H}) = 0.5$. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)$.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u)\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)$ avec $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e) + \mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{H})\mathrm{P}(\mathrm{H})$.

Application numérique : $\mathrm{P}(\mathrm{L}u) = 0.4$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{F}e/\mathrm{L}u) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{L}u/\mathrm{F}e)\mathrm{P}(\mathrm{F}e)}{\mathrm{P}(\mathrm{L}u)} = 0.5$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.

L'application $\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_{\mathrm{A}} : & \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & \mathrm{B} & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} \end{array}$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On considère :

— $\mathrm{F} = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

— $\mathrm{G} = \{(u+v, u+v, u), u, v \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Correction :

— F et G sont des sev.

— On a $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. Montrons que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

Soit $(x, y, z)\mathbb{R}^3$. On cherche $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ tels que $(x, y, z) = f + g$.

Comme $f \in \mathrm{F}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$.

Comme $g \in \mathrm{G}$, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tel que $f = (u+v, u+v, u)$.

$$(x, y, z) = f + g \iff \begin{cases} \alpha + u + v = x \\ 2\alpha + u + v = y \\ 3\alpha + u = z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -x + y \\ u = 3x - 3y + z \\ v = -x + 2y - z \end{cases}.$$

(x, y, z) est donc décomposable de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G. On en déduit que F et G sont en somme directe, et que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. QED

Exercice 2 : La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ?

Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Correction : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = pq$ car les maladies sont indépendantes.

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p + q - pq$

Exercice 3 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

1. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
2. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Correction :

1. Le taux global de personnes soulagées : $\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{3}{5}0.75 + \frac{2}{5}0.90 = 0.81$.
2. Probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{S})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{A})/\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \frac{\frac{3}{5}0.75}{0.81} = 55.6\%.$$

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Une famille de polynômes non nuls échelonnées par les degrés est libre.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
2. En déduire $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 2 : Soit l'univers $\Omega = [\![1, 2n]\!]$.

Peut-on trouver deux réels a, b tels que $\forall k \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = ak + b$ définisse une probabilité et que $\mathrm{P}([\![1, n]\!]) = \dfrac{1}{4}$?

Exercice 3 : Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.

On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Correction :

1. Probabilité conditionnelle : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds. C'est $\mathrm{P}(\mathrm{CB}/\mathrm{YB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB})\mathrm{P}(\mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{YB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB} \cap \mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{YB}) = \dfrac{0.15}{0.4} = 0.375$.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB}) = \mathrm{P}(\mathrm{YB} \cap \mathrm{CB})/\mathrm{P}(\mathrm{CB}) = \dfrac{0.15}{0.25} = 0.6$.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds,de ne pas avoir les yeux bruns. C'est $\mathrm{P}(\text{nonYB}/\mathrm{CB}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{YB}/\mathrm{CB}) = 0.4$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 : Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Correction : Pour montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base nous allons montrer que cette famille est libre et génératrice.

1. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Soit une combinaison linéaire nulle $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, nous devons montrer qu'alors les coefficients a, b, c sont nuls. Ici le vecteur nul est $0 = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0) \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (0,0,0) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (0,0,0) \\
\iff & \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les coefficients vérifient $a = b = c = 0$, cela prouve que la famille est libre.

2. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice. Pour n'importe quel vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ on doit trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$.

$$\begin{aligned}
& av_1 + bv_2 + cv_3 = v \\
\iff & a(0,1,1) + b(1,0,1) + c(1,1,0) = (x,y,z) \\
\iff & (b+c, a+c, a+b) = (x,y,z) \\
\iff & \begin{cases} b+c=x & \\ a+c=y & (\mathrm{L}_2) \\ a+b=z & (\mathrm{L}_3) \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=x & (\mathrm{L}'_1) \\ a+c=y & \\ b-c=z-y & (\mathrm{L}'_3)=(\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2) \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 2b = x+z-y & (\mathrm{L}'_1+\mathrm{L}'_3) \\ a+c=y & \\ 2c = x-(z-y) & (\mathrm{L}'_1-\mathrm{L}'_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x+y+z) \\ b = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ c = \frac{1}{2}(x+y-z) \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{1}{2}(-x+y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x-y+z)$, $c = \frac{1}{2}(x+y-z)$ nous avons donc la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = (x, y, z) = v$. Donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice.

3. La famille est libre et génératrice donc c'est une base.

4. Pour écrire $w = (1, 1, 1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3) on peut résoudre le système correspondant à la relation $av_1 + bv_2 + cv_3 = w$. Mais en fait nous l'avons déjà résolu pour tout vecteur (x, y, z), en particulier pour le vecteur $(1, 1, 1)$ la solution est $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = w$. Les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3) sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 2 : Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Correction : Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7)\cdot(1-0.5)\cdot(1-0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1 - 0.015 = 0.985$.

Exercice 3 : On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

— Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

Correction :

1. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})/\mathrm{P}(\mathrm{T}^+)$ or $\mathrm{P}(\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{M})\mathrm{P}(\mathrm{M})+\mathrm{P}(\mathrm{T}^+/\mathrm{S})\mathrm{P}(\mathrm{S}) = 0.95\cdot 0.03+0.1\cdot 0.97 = 0.125\,5$. D'où : $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 22.7\%$.
2. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif est $\mathrm{P}(\mathrm{S}/\mathrm{T}^+) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^+) = 77.3\%$.
3. La probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif est $\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.0017$.
4. La probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif est $1-\mathrm{P}(\mathrm{M}/\mathrm{T}^-) = 0.998 = 99.8\%$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

Donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Correction : Par exemple la famille $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.

La famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Exercice 2 : La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ?

Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction : Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{G}),(\mathrm{F},\mathrm{F})\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $\mathrm{P(A)} = \frac{2}{4}$, $\mathrm{P(B)} = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $\mathrm{P(A \cap B)} \neq \mathrm{P(A)P(B)}$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}, b \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}, c \in \{\mathrm{G},\mathrm{F}\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}(\{(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{F},\mathrm{F},\mathrm{F})\}) = \frac{6}{8}$; $\mathrm{P(B)} = \frac{4}{8}$, $\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P}\{(\mathrm{F},\mathrm{G},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{F},\mathrm{G}),\{(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{F})\} = \frac{3}{8}$. On a $\mathrm{P(A)P(B)} = \frac{3}{8} = \mathrm{P(A \cap B)}$, et les événements A et B sont indépendants

Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $\mathrm{P(A)} = 1 - \frac{2}{2^n}$, $\mathrm{P(B)} = \frac{1+n}{2^n}$ $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $\mathrm{P(A)P(B)} = \mathrm{P(A \cap B)}$ si et seulement si $n = 3$.

Exercice 3 : Dans mon trousseau de clés il y a 8 clés ; elles sont toutes semblables. Pour rentrer chez moi je mets une clé au hasard ; je fais ainsi des essais jusqu'à ce que je trouve la bonne ; j'écarte au fur et à mesure les mauvaises clés. Quelle est la probabilité pour que j'ouvre la porte :

1. du premier coup ?
2. au troisième essai ?
3. au cinquième essai ?
4. au huitième essai ?

Correction : Une manière de résoudre le problème est la suivante : puisqu'il y a 8 clés et que j'écarte une après l'autre les mauvaises clés, je considère comme ensemble de toutes les possibilités, toutes les permutations de ces huit clés : il y en a $8\,!$. Alors la solution de chaque question est basée sur le même principe :

1. Les permutations (fictives) qui traduisent le cas (1) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $\mathrm{BMMMMMMM}$, la lettre B désigne la bonne, M désigne une mauvaise. Il y a 7! permutations de ce type. Donc $\mathrm{P(A)} = \dfrac{7!}{8!} = \dfrac{1}{8}$, on s'en doutait !
2. De même, les permutations (fictives) sont celles qui peuvent être représentées par une suite : $\mathrm{MBMMMMMM}$: il y en a encore $7\,!$, et la probabilité est la même.
3. Le raisonnement permet en fait de conclure que la probabilité, avant de commencer, d'ouvrir la porte est la même pour le premier, deuxième,..., huitième essai.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Formule de Grassmann.

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E.

On considère C un supplémentaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ dans B. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{C}$.

Exercice 2 : On dispose de deux dés A et B. Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir *Pile* soit de $\frac{1}{3}$. Si on obtient *Pile*, on décide de jouer uniquement avec le dé A. Sinon, on décide de jouer uniquement avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au premier coup.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième coup.
3. On a obtenu rouge aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^\star$). Calculer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 3 : Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction : Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a $20\,!$.

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a $18!$ choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base incomplète.

Exercice 1 : On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Soient $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = 0_2\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), BM = 0_2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A + B$ est inversible. En déduire que F et G sont en somme directe.

   Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 : Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées).
On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

1. On obtient un « six » . Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
2. Au contraire, on a obtenu un « cinq » . Même question.

Exercice 3 : Dans l'ancienne formule du Loto il fallait choisir 6 numéros parmi 49.

1. Combien y-a-t-il de grilles possibles ? En déduire la probabilité de gagner en jouant une grille.
2. Quelle est la probabilité que la grille gagnante comporte 2 nombres consécutifs ?

Correction :

1. Combien de grilles ? Il y en a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$
2. Combien de grilles avec 2 nombres consécutifs ? Ce problème peut être résolu par astuce : considérer les numéros gagnants comme 6 places à «choisir» parmi 49. En considérant des cloisons matérialisant les numéros gagnants, c'est un problème de points et cloisons Par exemple :

   $$| \bullet \bullet || \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet\bullet |$$

   les gagnants sont : 1 ; 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 14. Dans notre cas on ne veut pas de cloisons consécutives. Les cinq cloisons séparent les numéros en 7 boîtes. Les 5 boîtes intérieures étant non vides, on y met 5 points, puis $38 (= 49 - 5 - 6)$ dans 7 boîtes. Il y a $\dfrac{(38-1+7)!}{38!6!} = 7.059\,1 \times 10^6$ séquences ne comportant pas 2 nombres consécutifs.

   D'où la probabilité d'avoir une grille comportant 2 nombres consécutifs : 0.4952.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème de la base extraite.

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E, P(1) = P'(2) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(2) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2 : On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = x\cos x,\ f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x\sin x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 3 : Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse, de façon conventionnelle : un homme avec une femme, mais pas forcément la sienne.

1. Quelle est la probabilité P(A) pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
2. Quelle est la probabilité P(B) pour que André danse avec son épouse ?
3. Quelle est la probabilité P(C) pour que André et René dansent avec leur épouse ?
4. Quelle est la probabilité P(D) pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

Correction :

1. L'univers des possibles est l'ensemble des couples possibles :

   il y en a $6! = 720$ (imaginez les dames assises et les hommes choisissant leur partenaire). La probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime est, si chacun choisit au hasard, $\dfrac{1}{6!}$.
2. André danse avec son épouse, les autres choisissent au hasard : il y a $5!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{5!}{6!} = \dfrac{1}{6}$.
3. André et René dansent avec leur épouse, les 4 autres choisissent au hasard : il y a $4!$ permutations pour ces derniers :

   $\mathrm{P}(\mathrm{C}) = \dfrac{4!}{6!} = \dfrac{1}{30}$.
4. André ou René dansent avec leur épouse, les 4 autres font ce qu'ils veulent. Considérons les événements D_1 : «André danse avec son épouse» ; D_2 : «René danse avec son épouse».

   Alors $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2$ et $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{D}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{D}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = \dfrac{3}{10}$.

Probabilités et dimension finie

Question de cours : Théorème dit, de fondation d'une probabilité sur un univers fini.

Exercice 1 (Polynômes d'interpolation de Lagrange) : Soient $a_0,\dots,a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts et $b_0,\dots,b_n$ $n+1$ nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ polynômes à coefficients complexes de degré n exactement vérifiant $\forall\,(i,j)\in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{L}_i(a_j)=1$ si $i=j$ et 0 sinon.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall\, i\in [\![0\,;n]\!]$, $\mathrm{P}(a_i)=b_i$. Expliciter P puis déterminer tous les polynômes vérifiant les égalités précédentes.

Exercice 2 : Montrer que les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Correction : $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Exercice 3 : Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

Correction : La probabilité d'avoir Princecharmant dans la barre B est $\frac{1}{5}$; si j'achète n barres, la probabilité de n'avoir la figurine dans aucune des n barres est $(\frac{4}{5})^n$, puisqu'il s'agit de n événements indépendants de probabilité $\frac{4}{5}$. Je cherche donc n tel que : $1 - (\frac{4}{5})^n \geqslant 0.8$. On a facilement : $n \geqslant 8$.

Puis, je cherche m tel que : $1 - (\frac{4}{5})^m \geqslant 0.9$; il faut au moins 11 barres pour que la probabilité dépasse 90%. Pour la probabilité 99%, $n \geqslant 21$.