

Dimension finie

Exercice 1 : Vrai ou faux ...

1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np
2. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. Pour toute matrice carrée A , $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$
4. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \circ v = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$.
5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

1. V : $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot) = \text{vect}(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$.
2. F : $I_n - I_n = 0_n$ n'est pas inversible.
3. F : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$.
4. F : C'est l'inclusion réciproque qui est vraie.

Contre-exemple : Soit $E = \text{vect}(e_1, e_2)$ un espace de dimension 2. En particulier (e_1, e_2) est libre.

$$\begin{array}{ccc} \text{Posons } u : E & \longrightarrow & E \text{ et } v : E \longrightarrow E \\ e_1 & \longmapsto & e_1 \qquad e_2 \longmapsto e_2 \\ e_2 & \longmapsto & 0 \qquad \quad \quad 0 \end{array}$$

Alors, $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ par construction.

Cependant, $\text{Im}(u) = \text{vect}(e_1) \not\subset \ker(v) = \text{vect}(e_2)$.

5. V : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = \frac{1}{2} \cdot (M + M^T) + \frac{1}{2} \cdot (M - M^T)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$.

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme nilpotent de E . Montrer que $f^n = 0$.

Soit p l'indice de nilpotence de f i.e. $f^p = 0$.

Si $p \leq n$ alors il est clair que $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0$.

Supposons le contraire i.e. $p \geq n+1$ tel que $f^{p-1} \neq 0$. Il existe donc un vecteur $v \in E$ tel que $f^{p-1}(v) \neq 0$. Montrons que la famille $(v, f(v), \dots, f^{p-1}(v))$ est libre dans E .

Comme E est de dimension n , il contiendra alors une famille libre de cardinal $p > n$ ce qui est contradictoire.

Considérons donc une combinaison linéaire nulle des $f^i(v)$:

$$\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(v) = 0.$$

En composant cette égalité par f^{p-1} , on obtient :

$$\lambda_0 f^{p-1}(v) = 0 \implies \lambda_0 = 0 \text{ car } f^{p-1}(v) \neq 0.$$

En itérant ce raisonnement, $f^{p-1}(v) \neq 0$ entraîne successivement $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$. La famille est libre et le résultat escompté.

Exercice 3 : Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

1. Pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$ qui est stable par g .
2. Soit $y \in \text{Im}(f)$ i.e. $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Alors, $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$ qui est aussi stable par g .