

Applications linéaires

CONTENU

I	Isomorphismes en dimension finie.	2
I.1	Groupe linéaire.	2
I.2	Isomorphismes et bases.	4
I.3	Espaces isomorphes.	6
II	Définition d'une application linéaire.	7
II.1	À partir de l'image d'une base.	8
II.2	À partir d'espaces supplémentaires.	9
III	Rang d'une application linéaire.	9
III.1	Généralités.	9
III.2	Rang d'une composée.	11
III.3	Théorème du rang.	11
IV	Formes linéaires et hyperplans.	13
IV.1	Équations linéaires.	13
IV.2	Hyperplans.	14
IV.3	Systèmes linéaires.	16
V	Endomorphismes remarquables.	17
V.1	Homothéties.	17
V.2	Projecteurs.	18
V.3	Symétries.	21

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Isomorphismes en dimension finie

Rappel 1 : Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la **proposition (4)**, que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \text{Id}_X$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \text{Id}_Y$, est surjective.

I.1 Groupe linéaire

Rappel 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I} \text{som}(E; F)$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(E)$.

Proposition 1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I} \text{som}(E; F) \iff f^{-1} \in \mathcal{I} \text{som}(F; E).$$

Vocabulaire : Deux espaces vectoriels sont dit *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Exemples 1 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

$$\begin{aligned} \text{--- } \varphi : \left\{ \begin{array}{l} \text{Suites géométriques} \\ \text{de raison } q \neq 0 \end{array} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ est un isomorphisme.} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto u_0 \end{aligned}$$

Corollaire 1.1 :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme :

$$\forall f \in \mathcal{I} \text{som}(E; F), g \in \mathcal{I} \text{som}(F; G), f \circ g \in \mathcal{I} \text{som}(E; G) \text{ et } (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) : Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

1. $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.
2. Pour tout réel t_0 , l'application $T_0 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^2$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$ puisque'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 1 : Montrer que l'application $S : f \mapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé *groupe linéaire de E* et noté $\mathcal{GL}(E)$.

Exemples 3 : — $(x; y) \mapsto (x + y; x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

- Les homothéties non nulles $\lambda \cdot \text{Id}_E$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda \cdot \text{Id}_E)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot \text{Id}_E$.
- Les symétries $s \in \mathcal{L}(E)$ i.e. $s^2 = \text{Id}_E$ sont des automorphismes de E tels que $s^{-1} = s$.

Exercice 2 : Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque.

$$v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x; y; z) \longmapsto \begin{pmatrix} x + 4z \\ x + y - z \\ 2y + z \end{pmatrix}$$

I.2 Isomorphismes et bases

Lemme 1 (Lemme de transport) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 : Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ avec

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x; y; z) \longmapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + z \\ -x - z \end{pmatrix}.$$

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

1. f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
2. f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
3. f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F .

Exemple 4 (Important) : Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Comme $f : E \rightarrow \text{Im}(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, on retrouve :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exercice 4 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $P \mapsto P - XP' - P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

Corollaire 2.1 :

Si deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$(i) \ f \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad (ii) \ f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad (iii) \ f \text{ est bijective.}$$

Méthode 1 (Montrer qu'un endomorphisme est bijectif en dimension finie) :

En dimension finie, pour montrer qu'un endomorphisme de E est bijectif, il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $\ker(f) = \{0_E\}$) ou que f est surjectif (en montrant $\text{Im}(f) = F$).

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) : Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Alors :

1. φ est linéaire.
2. φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n + 1$.
3. L'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Toute fonction définie sur un ensemble contenant les α_j coïncide en chacun de ces $(n + 1)$ points avec le polynôme défini par :

$$P = \sum_{i=0}^n f(\alpha_i) L_i.$$

Exercice 5 : Montrer que $P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est un isomorphisme de E sur F .
2. f est inversible à gauche *i.e.* $\exists g \in \mathcal{L}(F; E)$, $g \circ f = \text{Id}_E$.
3. f est inversible à droite *i.e.* $\exists h \in \mathcal{L}(F; E)$, $f \circ h = \text{Id}_F$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1} .

Moralité : En dimension finie, l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffit à l'existence d'un inverse et, dans tous les cas, c'est le même.

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie.

En effet, la dérivation D , par exemple, a un inverse à droite tel que $D \circ P = \text{Id}_E$, mais on a $P \circ D \neq \text{Id}_F$.

En particulier, D n'est pas un isomorphisme.

I.3 Espaces isomorphes

Rappel 3 : On dit que deux K -espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Une mathématicienne à son ami :

- *Es-tu fidèle ?*

- *Oui, à isomorphisme près.*

Proposition 5 (Morphisme de K^n dans E) :

Soit E un K -ev et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{F}} : \quad K^p &\longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \end{aligned}$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- $\mathcal{F}$ est une base de E $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est bijective ;

Corollaire 5.1 :

1. Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
2. Deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie sont isomorphes.

Théorème 6 :

Deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Méthode 2 (Montrer qu'un espace est de dimension finie) :

Pour montrer que E est de dimension finie n , on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n .

Exemples 6 : — $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\begin{aligned} T_0 : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\longmapsto (y(t_0); y'(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

- L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *i.e.* vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 en considérant l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S}_2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0; u_1) \end{aligned}$$

II/ Définition d'une application linéaire _____

Exemple 7 : Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'application $\varphi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire appelée fonction $i^{\text{ème}}$ coordonnée.
 $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \longmapsto x_i$

En particulier, $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

II.1 À partir de l'image d'une base

Théorème 7 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec $\dim(E) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F , il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad g(e_i) = f_i.$$

Corollaire 7.1 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Exemple 8 : Considérons l'ensemble P des vecteurs du plan muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

La donnée de $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ suffit à définir $f \in \mathcal{L}(P)$.

Par exemple, si $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, on a $f(\vec{u}) = \dots$

Proposition 8 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(E; F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E; F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Exemple 9 (Dimension du dual en dimension finie) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

L'ensemble $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E a donc même dimension que E .

Exercice 6 : Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes.

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

II.2 À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$.
2. Simplifier $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$.

En déduire que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \ker(f - \text{Id}_E)$.

3. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f - 2\text{Id}_E)$.
4. Prouver que $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{Id}_E)$

Aide : $\text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) - (f - 2\text{Id}_E)$.

III/ Rang d'une application linéaire

III.1 Généralités

Définition 2 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle *rang de f* la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 : — Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.

— Si $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\text{rg}(p_1) = 1$.
 $(x, y) \mapsto x$

— Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\text{rg}(\varphi) = 1$.

— Si $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $\text{rg}(p) = \dim(F)$.

— Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 0$, alors $\text{rg}(\lambda \text{Id}_E) = \dim(E)$.

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

$$\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E); \dim(F)).$$

Plus précisément :

1. Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.
2. Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si f est injective.

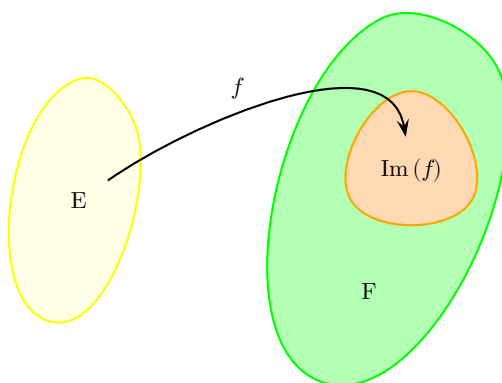


Figure XXVII.1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.

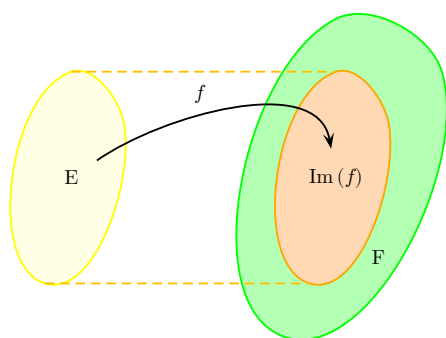


Figure XXVII.2 – f est injective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.

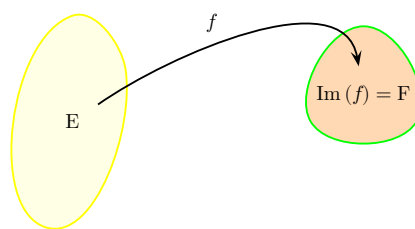


Figure XXVII.3 – f est surjective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f) \iff E = \ker(f) + \text{Im}(f) \iff \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

III.2 Rang d'une composée

Proposition 11 :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg}(f); \operatorname{rg}(g)).$$

Exercice 9 (Inégalité triangulaire) : On considère deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie.

Établir que $|\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f)| \leq \operatorname{rg}(g + f) \leq \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f)$.

Proposition 12 :

Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $u \in \mathcal{L}(G; E)$ et $v \in \mathcal{L}(F; H)$ sont des **isomorphismes** alors :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f \circ u) = \operatorname{rg}(v \circ f).$$

Le rang est inchangé par isomorphisme.

III.3 Théorème du rang

Théorème 13 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec E de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$.

En particulier,

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E).$$

Remarques :

1. La dimension de l'image $\operatorname{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\operatorname{Im}(f))$.
2. La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
3. Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\operatorname{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.
4. Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
 - Il n'existe pas d'applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
 - Il n'existe pas d'application linéaires surjectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Contre-Exemples 11 :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{est linéaire, injective, mais non surjective.}$$

$$(x, y) \longmapsto (x, y, x - y)$$

Exercice 10 :

- Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
 - $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.
 - $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.
- Déterminer une base du noyau, et une base de l'image pour chacune d'elles.

ATTENTION

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces! On n'a pas, en général, $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$: $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\ker(f) \subset E$ et $\text{Im}(f) \subset F$)!
- Même lorsque f est un endomorphisme, on n'a pas nécessairement $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$!

Par exemple, pour $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ On a $\ker(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}(1; 0)$:

$$(x, y) \longmapsto (y, 0).$$

$\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Corollaire 13.1 (Caractérisation des isomorphismes) :

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

- Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\ker(f) = \{0\} \iff \text{Im}(f) = E \iff \text{rg } f = \dim(E) \iff f \in \mathcal{G}l(E)$$

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie!

ATTENTION

Contre-Exemples 12 : $\diamond g: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme injectif, mais non surjectif.

$$P \longmapsto XP$$

$\diamond h: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme surjectif, mais non injectif.

$$P \longmapsto P'$$

Exercice 11 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.

IV/ Formes linéaires et hyperplans

IV.1 Équations linéaires

Rappel 4 :

- On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
 - $f : E \mapsto F$, une application linéaire.
 - $b \in F$, appelé second membre de l'équation.
 - $x \in E$, un vecteur quelconque.
- On appelle *équation homogène* associée à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_F$.

Proposition 14 :

Soit $f : E \mapsto F$, une application linéaire.

1. L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_F$ est $\ker(f)$.
2. L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \text{Im}(f)$ et, dans ce cas :

$$(\mathcal{S}) = x_0 + (\mathcal{S}_0),$$

où x_0 est une solution *particulière* de $f(x) = b$.

Remarque : Si f est bijective, l'équation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.

Exemples 13 : — Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

est une équation linéaire $f(\mathbf{X}) = \mathbf{B}$ avec

$$f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad B = (b_1, \dots, b_n).$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$

— Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.

— $(\mathcal{P}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \Phi(x; y; z) = 0_{\mathbb{R}}\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto x + y + z \end{aligned}$$

— $(\mathcal{D}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \varphi(x; y; z) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ où

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— Toute équation différentielle linéaire d'ordre un $y' + a(t)y = b(t)$ peut être interprétée comme une équation linéaire $f(y) = b(t)$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}). \\ y &\longmapsto y' + ay \end{aligned}$$

IV.2 Hyperplans

Rappel 5 : Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition 3 (Hyperplan) : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle *hyperplan* de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E .

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \mapsto 0_E$ est E tout entier.

Exemples 14 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$.
- L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P'(1) + P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P'(1) + P(0)$.

On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de $P : P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.

- L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'(0) = f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0) - f'(0)$.

Ici, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H une partie de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E .
2. H est supplémentaire d'une droite de E .

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Exemples 15 : En dimension 3, les hyperplans sont des plans et en dimension 2, les hyperplans sont des droites.

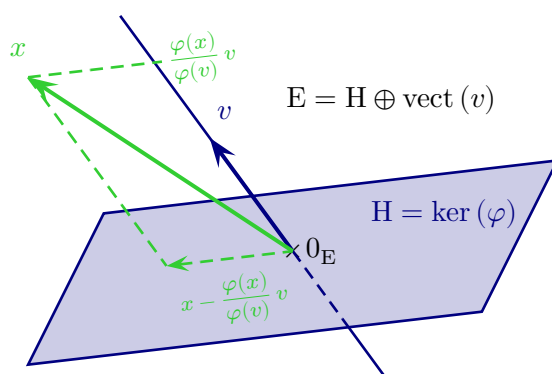


Figure XXVII.4 – $\mathbb{R}^3$ est engendré par une droite et un plan ne la contenant pas.

Exemples 16 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.
- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples 17 :

- L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y = z + t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 1 = 3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$(x, y, z, t) \mapsto 2x + y - z - t.$$

- L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(0) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension $5 - 1 = 4$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$P \mapsto P(1) - P(0).$$

Exercice 12 : Soit H un hyperplan de E de dimension finie.

Montrer que, pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}.a$.

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau.

Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$H = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi.$$

Exercice 13 : Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.

IV.3 Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

Considérons un système d'équations linéaires homogène de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, posons $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p$.

φ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Son noyau est donc un hyperplan H_i .

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système correspond ainsi à l'intersection $\bigcap_{i=1}^n H_i$ de n hyperplans de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

1. L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.
2. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactly r hyperplans de E .

Par exemple, le système linéaire
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$
 d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite de dimension $1 \geq 3 - 3 = 0$ et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières. Le théorème s'applique.

V/ Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries

V.1 Homothéties

Définition 4 : Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle *homothétie* de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_E :

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Proposition 18 :

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Exercice 14 : Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

V.2 Projecteurs

Définition 5 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

On appelle *projection* (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \mapsto E_1$ telle que :

$$\forall x_1 \in E_1, p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in E_2, p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

On dira qu'une application p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E tels que p soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Remarque : L'existence et l'unicité d'une telle application linéaire p est donnée par la [proposition \(9\)](#) avec

$$\begin{aligned} f|_{E_1} : E_1 &\longrightarrow E & \text{et} & & f|_{E_2} : E_2 &\longrightarrow E \\ x_1 &\longmapsto x_1 & & & x_2 &\longmapsto 0_E. \end{aligned}$$

Exemple 18 : Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ i.e. $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}\vec{e}_2 = D_1 \oplus D_2$.

On peut alors définir la projection p sur D_1 parallèlement à D_2 :

$$\begin{aligned} p : \vec{\mathcal{E}}_2 = D_1 \oplus D_2 &\longrightarrow D_1 \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 &\longmapsto \vec{x}_1. \end{aligned}$$

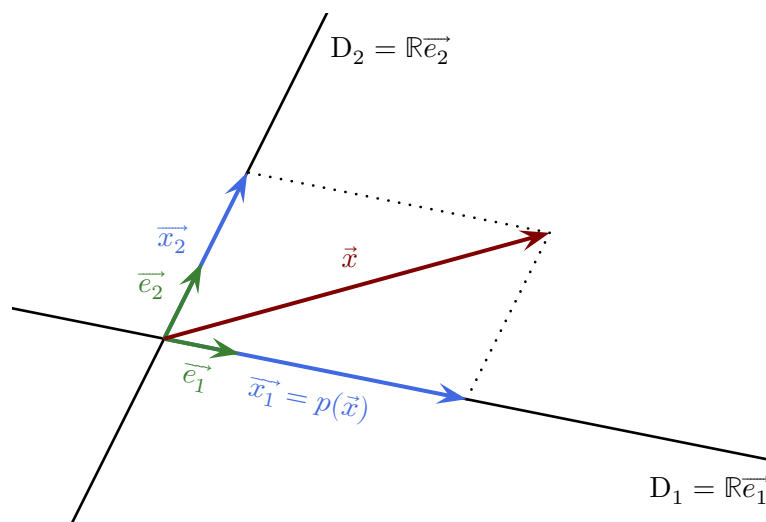


Figure XXVII.5 – Exemple de projecteur dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p \circ p = p$ (On dit que p est *idem-potent*.)
3. $E_2 = \ker(p)$.
4. $E_1 = \operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p .

En particulier, si p est un projecteur alors $\ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = E$.

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

ATTENTION

$x \mapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante!

Méthode 3 (Montrer qu'une application linéaire est un projecteur) :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$ alors :

1. p est un projecteur.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$:

$$E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$

3. p est LA projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

À retenir 2 :

Dans le cas d'un projecteur p , retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall u \in E, u = \underbrace{p(u)}_{\in \operatorname{Im}(p)} + \underbrace{u - p(u)}_{\in \ker(p)}.$$

Exemple 19 : Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

— $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

— $p(p((x, y))) = p\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p((x, y))$. Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$$(x, y) \in \ker(p) \iff \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) = (0, 0) \iff y = -x \iff (x, y) = (x, -x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).$$

$$(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

Donc, p est le projecteur sur $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, -1)$.

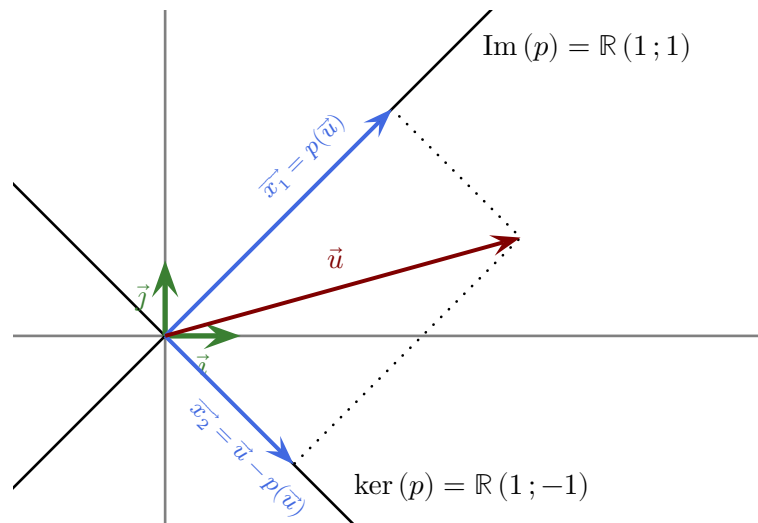


Figure XXVII.6 – Projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 : Identifier l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -9x + 6y \\ -15x + 10y \\ -5x + 3y + z \end{pmatrix}$$

Définition 6 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des *projecteurs associés*.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

$$1. \quad p + q = \text{Id}_E.$$

$$2. \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Exercice 16 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p, q deux projecteurs de E .

1. Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.
2. Démontrer que $p \circ q = q \iff \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.

V.3 Symétries

Définition 7 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle *symétrie* par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \text{Id}_E$.

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

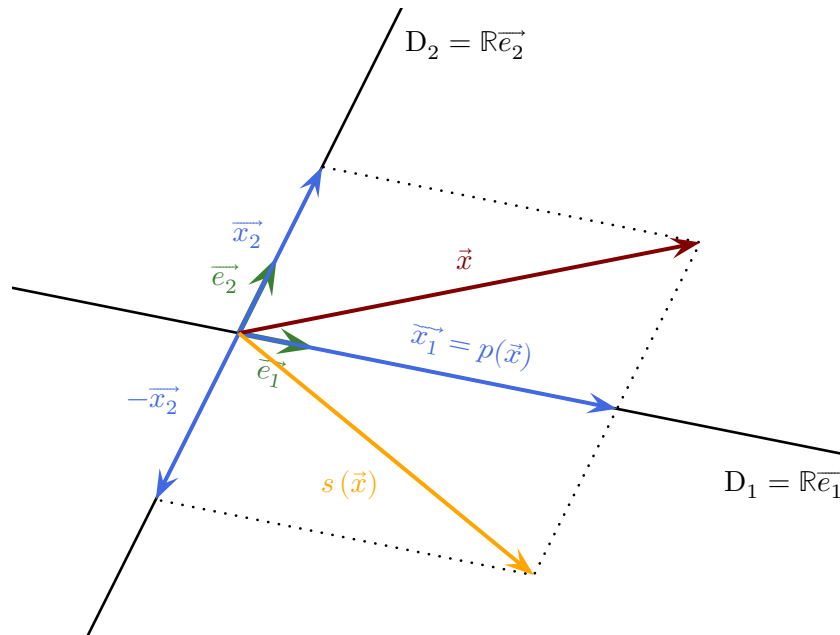
Remarque : On a aussi $s = p - q$ où p et q sont les projecteurs associés à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$.

Exemple 20 : Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$
i.e. $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}\vec{e}_2 = D_1 \oplus D_2$.

On peut alors définir la symétrie s par rapport à D_1 parallèlement à D_2 :

$$\begin{aligned} s : \vec{\mathcal{E}}_2 = D_1 \oplus D_2 &\longrightarrow E_1 \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 &\longmapsto \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \end{aligned}$$

Figure XXVII.7 – Exemple de symétrie dans $\mathbb{R}^2$.**Proposition 22 (Propriétés des symétries) :**

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

1. $s \in \mathcal{L}(E)$
2. $s \circ s = \text{Id}_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
3. $E_1 = \ker(s - \text{Id}_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .
4. $E_2 = \ker(s + \text{Id}_E)$ i.e. E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s .

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E) = E$.

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \text{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

ATTENTION

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !

Méthode 4 (Montrer qu'une application linéaire est une symétrie) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors :

1. s est une symétrie.
2. E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - Id_E)$ et $\ker(s + Id_E)$:

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E).$$

3. s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.

À retenir 3 :

Dans le cas d'une symétrie s , retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall u \in E, u = \underbrace{\frac{u + s(u)}{2}}_{\in \ker(s - Id_E)} + \underbrace{\frac{u - s(u)}{2}}_{\in \ker(s + Id_E)}.$$

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \text{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.

Exemple 21 : Soit $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (y, x)$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = Id_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,

$$(x, y) \in \ker(S - Id_E) \iff (y, x) = (x, y) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

$$(x, y) \in \ker(S + Id_E) \iff (y, x) = (-x, -y) \iff x = -y \iff (x, y) = (x, -x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).$$

Donc S est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, -1)$.

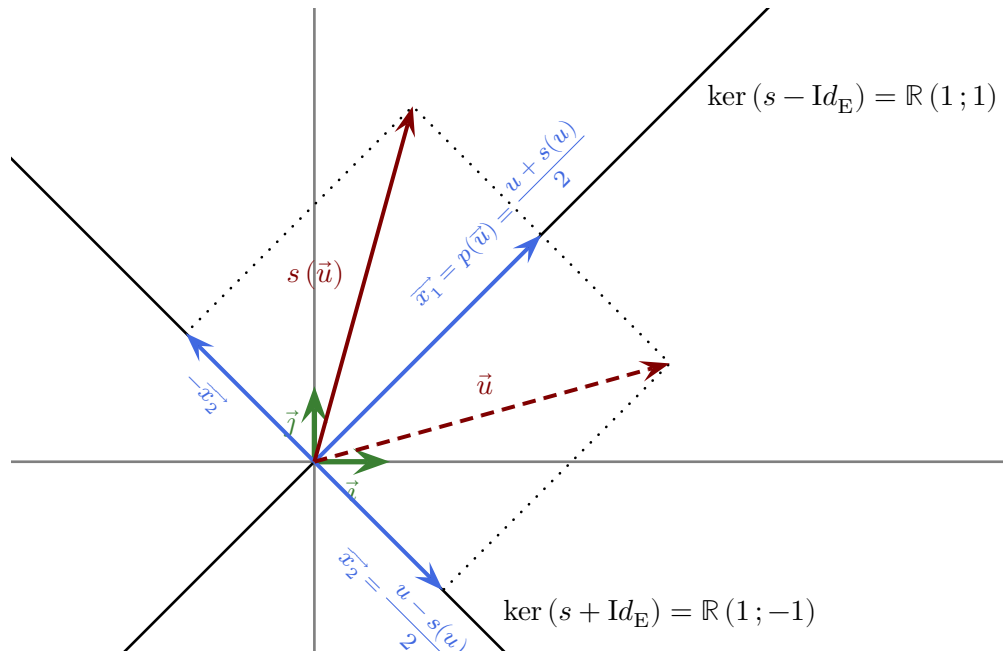


Figure XXVII.8 – Symétrie par rapport à la droite $y = x$ et parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17 : Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) / x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$.

1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, déterminer $s((x, y, z))$.

Un ingénieur, un physicien, un mathématicien doivent parquer un troupeau de moutons avec le moins de barbelé possible.

L'ingénieur prend son barbelé et fait le tour du troupeau.

Le physicien va chercher des chiens de berger pour les rassembler et fait le tour du troupeau avec le barbelé.

Le mathématicien prend 20 cm de barbelé et se les met autour de la taille et définit l'enclos comme l'ensemble où il n'est pas.