

Applications linéaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 27



- 1 Isomorphismes en dimension finie
- 2 Définition d'une application linéaire
- 3 Rang d'une application linéaire
- 4 Formes linéaires et hyperplans
- 5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries





our comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles :

- Lorsque l'on étudie des ensembles, on s'intéresse aux applications bijectives, qui préservent le « nombre d'éléments » de l'ensemble.
- En analyse, on étudie les fonctions continues, qui préservent l'opération de limite
- En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire : les applications linéaires.



es **applications linéaires** sont donc des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers.





our comparer des structures mathématiques du même type, on considère les applications d'un ensemble dans un autre qui préservent les opérations définies sur ces ensembles :

- Lorsque l'on étudie des ensembles, on s'intéresse aux applications bijectives, qui préservent le « nombre d'éléments » de l'ensemble.
- En analyse, on étudie les fonctions continues, qui préservent l'opération de limite
- En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent l'addition et la multiplication par un scalaire : les applications linéaires.



es **applications linéaires** sont donc des applications « naturelles » dans les espaces vectoriels, qui apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, et pour lesquels une étude tout à fait générale et théorique est possible, ce qui permet d'appréhender un peu mieux la puissance de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de maths très divers.

Dans ce chapitre, lorsqu'on omettra de le dire et sauf mention contraire, on considérera que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ réduit à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1 Isomorphismes en dimension finie

- Groupe linéaire
- Isomorphismes et bases
- Espaces isomorphes

2 Définition d'une application linéaire

3 Rang d'une application linéaire

4 Formes linéaires et hyperplans

5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries



I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .



I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la **proposition (4)**, que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \text{Id}_X$, est injective.



I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la **proposition (4)**, que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \text{Id}_X$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \text{Id}_Y$, est surjective.



I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la **proposition (4)**, que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \text{Id}_X$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \text{Id}_Y$, est surjective.



I. Isomorphismes en dimension finie

Rappel :

Dans le contexte général une application $f : X \mapsto Y$ est bijective si, et seulement si il existe $g : Y \mapsto X$ une application telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Dans ce cas g est unique, noté f^{-1} et appelé inverse de f .

De plus, $f^{-1} : Y \mapsto X$ est bijective d'inverse f .

En particulier, on se rappellera, notamment pour la démonstration de la **proposition (4)**, que :

- Une fonction f qui admet un inverse à gauche *i.e.* $g \circ f = \text{Id}_X$, est injective.
- Une fonction f qui admet un inverse à droite *i.e.* $f \circ g = \text{Id}_Y$, est surjective.

Dis autrement dans un langage de groupe, f est bijective si, et seulement si f est inversible dans $(\mathcal{F}(X; Y), \circ)$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som(E; F)$ leur ensemble.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}om(E; F)$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(E)$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som(E; F)$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(E)$.

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I}som(E; F) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som(F; E).$$



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Rappel :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- f est un isomorphisme si, et seulement si f un homomorphisme (d'espaces vectoriels) bijectif. On note $\mathcal{I}som(E; F)$ leur ensemble.
- f est un automorphisme de E si, et seulement si f est un endomorphisme bijectif. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}l(E)$.

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$$f \in \mathcal{I}som(E; F) \iff f^{-1} \in \mathcal{I}som(F; E).$$

Vocabulaire : Deux espaces vectoriels sont dit **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre eux.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exemples I :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exemples I :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec pour isomorphisme :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

C'est cet isomorphisme qui permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de façon légèrement abusive, mais transparente.

- $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \text{Suites géométriques} \\ \text{de raison } q \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto u_0$$



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Corollaire I :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- ❶ La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Corollaire I :

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- ❶ La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- ❷ La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme :
 $\forall f \in \mathcal{I}som(E; F), g \in \mathcal{I}som(F; G),$

$$f \circ g \in \mathcal{I}som(E; G) \quad \text{et} \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) :

Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

- 1 $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exemple 2 (Isomorphisme en analyse) :

Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Alors :

- ❶ $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$.
- ❷ Pour tout réel t_0 , l'application $T_0 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^2$ est un isomorphisme
$$y \longmapsto (y(t_0); y'(t_0))$$

de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$ puisqu'elle est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exercice I :

Montrer que l'application $S : f \mapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exercice I :

Montrer que l'application $S : f \mapsto (f', f(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Cet isomorphisme est un peu surprenant car $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est à la fois beaucoup plus petit que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et isomorphe à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, donc plus gros que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$!



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Définition/Théorème 1 (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé **groupe linéaire de E** et noté $gl(E)$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Définition/Théorème I (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé **groupe linéaire de E** et noté $gl(E)$.

Exemples 3 :

- $(x; y) \mapsto (x + y; x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Définition/Théorème I (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé **groupe linéaire de E** et noté $Gl(E)$.

Exemples 3 :

- $(x; y) \mapsto (x + y; x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- Les homothéties non nulles $\lambda.Id_E$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.Id_E)^{-1} = \lambda^{-1}.Id_E$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Définition/Théorème I (Groupe linéaire) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est un groupe, appelé **groupe linéaire de E** et noté $\mathcal{GL}(E)$.

Exemples 3 :

- $(x; y) \mapsto (x + y; x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
- Les homothéties non nulles $\lambda.Id_E$ avec $\lambda \neq 0$ sont des automorphismes de E avec $(\lambda.Id_E)^{-1} = \lambda^{-1}.Id_E$.
- Les symétries $s \in \mathcal{L}(E)$ i.e. $s^2 = Id_E$ sont des automorphismes de E tels que $s^{-1} = s$.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

L'ensemble $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est ce qu'on appelle un anneau non commutatif.

L'addition joue son rôle usuel et la composition joue à peu de choses près le rôle de la multiplication dans les ensembles de nombres usuels ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

En effet, la composition admet un élément neutre qui est l'application identité et elle est distributive par rapport à l'addition, tout comme le produit dans les ensembles de nombres mais toutes les applications linéaires ne sont pas inversibles (seuls les automorphismes le sont).

En ce sens, $Gl(E)$ peut également être vu comme l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

En fait, nous verrons plus loin que la composition d'applications linéaires s'identifie effectivement à un produit, celui des matrices. Pour l'instant, nous utilisons déjà cette analogie pour justifier l'énorme abus de notation suivant : pour une application linéaire, on notera $f \circ f = f^2$ (un carré au sens « produit » n'aurait en général aucun sens), et plus généralement f^n la composée de f n fois par elle-même.



I. Isomorphismes en dimension finie

1. Groupe linéaire

Exercice 2 :

Montrer que l'application suivante est un automorphisme et expliciter son automorphisme réciproque.

$$\begin{aligned} v : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x + 4z \\ x + y - z \\ 2y + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Analysons maintenant le lien entre les propriétés d'une application linéaire et celles de familles particulières des espaces vectoriels concernés. Que se passe-t-il durant le transport ?

Tout d'abord un petit lemme utile en pratique :

Lemme 1 (Lemme de transport) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\text{Im}(f)$.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Analysons maintenant le lien entre les propriétés d'une application linéaire et celles de familles particulières des espaces vectoriels concernés. Que se passe-t-il durant le transport ?

Tout d'abord un petit lemme utile en pratique :

Lemme 1 (Lemme de transport) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

L'image de toute famille génératrice de E est génératrice de $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 :

Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ avec

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + z \\ -x - z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

① f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

- ① f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
- ② f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

- ❶ f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
- ❷ f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
- ❸ f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F .



1. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Théorème 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie.

- ① f est injective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille libre.
- ② f est surjective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une famille génératrice.
- ③ f est bijective $\iff$ l'image par f d'une base de E est une base de F .

Exemple 4 (Important) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Comme $f : E \mapsto \text{Im}(f)$ est surjective, on déduit de la propriété précédente que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, on retrouve :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exercice 4 :

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

$$\textcircled{1} \quad (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y).$$



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exercice 4 :

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

❶ $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y).$

❷ $P \mapsto P - XP' - P(0)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E et F sont isomorphes,
alors ils ont la même dimension.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E et F sont isomorphes,
alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (**confer** corollaire (3)) que la réciproque est vraie.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (**confer** corollaire (3)) que la réciproque est vraie.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

(i) f est surjective $\iff$ (ii) f est injective $\iff$ (iii) f est bijective.



1. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Corollaire 2 :

Si deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension.

On verra plus loin (**confer** corollaire (3)) que la réciproque est vraie.

Théorème 3 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

(i) f est surjective $\iff$ (ii) f est injective $\iff$ (iii) f est bijective.

Méthode I :

En dimension finie, pour montrer qu'un endomorphisme de E est bijectif, il suffit de montrer que f est injectif (en montrant par exemple que $\ker(f) = \{0_E\}$) ou que f est surjectif (en montrant $\text{Im}(f) = F$).



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned} .$$

Alors :

- ❶ φ est linéaire.

I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Alors :

- ❶ φ est linéaire.
- ❷ φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n + 1$.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exemple 5 (Polynômes de Lagrange) :

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et définissons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

Alors :

- ❶ φ est linéaire.
- ❷ φ est bijective car aisément injective entre deux espaces de même dimension $n+1$.
- ❸ L'image par φ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ qui n'est autre que la base des polynômes de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associée à $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$:

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j} \quad \text{avec} \quad L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Toute fonction définie sur un ensemble contenant les α_j coïncide en chacun de ces $(n+1)$ points avec le polynôme défini par :

$$P = \sum_{i=0}^n f(\alpha_i) L_i.$$

I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Exercice 5 :

Montrer que $P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1 f est un isomorphisme de E sur F .



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ f est un isomorphisme de E sur F .
- ❷ f est inversible à gauche *i.e.* $\exists g \in \mathcal{L}(F; E)$, $g \circ f = \text{Id}_E$.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ f est un isomorphisme de E sur F .
- ❷ f est inversible à gauche *i.e.* $\exists g \in \mathcal{L}(F; E), g \circ f = Id_E$.
- ❸ f est inversible à droite *i.e.* $\exists h \in \mathcal{L}(F; E), f \circ h = Id_F$.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ f est un isomorphisme de E sur F .
- ❷ f est inversible à gauche *i.e.* $\exists g \in \mathcal{L}(F; E)$, $g \circ f = \text{Id}_E$.
- ❸ f est inversible à droite *i.e.* $\exists h \in \mathcal{L}(F; E)$, $f \circ h = \text{Id}_F$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1} .



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

Proposition 4 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de **même** dimension finie, et soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ❶ f est un isomorphisme de E sur F .
- ❷ f est inversible à gauche *i.e.* $\exists g \in \mathcal{L}(F; E), g \circ f = Id_E$.
- ❸ f est inversible à droite *i.e.* $\exists h \in \mathcal{L}(F; E), f \circ h = Id_F$.

De plus, les inverses à gauche et à droite coïncident nécessairement avec f^{-1} .

Moralité : En dimension finie, l'existence d'un inverse à gauche ou à droite suffit à l'existence d'un inverse et, dans tous les cas, c'est le même.



I. Isomorphismes en dimension finie

2. Isomorphismes et bases

ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai si on ne suppose pas les espaces E et F de même dimension finie.

En effet, la dérivation D , par exemple, a un inverse à droite tel que $D \circ P = Id_E$, mais on a $P \circ D \neq Id_F$.

En particulier, D n'est pas un isomorphisme.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Remarque : La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie).



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Précisons quelques propriétés des espaces isomorphes.

Rappel :

On dit que deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F sont isomorphes, noté $E \simeq F$, s'il existe un isomorphisme f entre eux.

Remarque : La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie).

Une mathématicienne à son ami :

- *Es-tu fidèle ?*
- *Oui, à isomorphisme près.*



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On considère l'application

$$\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

■ $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On considère l'application

$$\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On considère l'application

$$\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Proposition 5 (Morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

On considère l'application

$$\phi_{\mathcal{F}} : \mathbb{K}^p \longrightarrow E$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

- $\phi_{\mathcal{F}}$ est linéaire ;
- $\mathcal{F}$ est génératrice $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est surjective ;
- $\mathcal{F}$ est libre $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est injective ;
- $\mathcal{F}$ est une base de E $\iff \phi_{\mathcal{F}}$ est bijective ;



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Corollaire 3 :

- ① Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Corollaire 3 :

- ❶ Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- ❷ Deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie sont isomorphes.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Corollaire 3 :

- ❶ Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- ❷ Deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie sont isomorphes.

En combinant le corollaire (2) et le corollaire (3) on obtient :

Théorème 6 :

Deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Corollaire 3 :

- ❶ Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- ❷ Deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie sont isomorphes.

En combinant le corollaire (2) et le corollaire (3) on obtient :

Théorème 6 :

Deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si ils ont même dimension.

Si on considère l'ensemble des espaces vectoriels de dimension finie, les classes d'équivalences pour la relation $\simeq$ sont donc paramétrées par $\mathbb{N}$.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Méthode 2 (Montrer qu'un espace est de dimension finie) :

Pour montrer que E est de dimension finie n , on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Méthode 2 (Montrer qu'un espace est de dimension finie) :

Pour montrer que E est de dimension finie n , on dispose de deux méthodes :

- exhiber une base de n vecteurs.
- exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension n .



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\begin{aligned} T_0 : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\longmapsto (y(t_0); y'(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.



I. Isomorphismes en dimension finie

3. Espaces isomorphes

Exemples 6 :

- $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas isomorphes
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ sont isomorphes
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $ay'' + by' + cy = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ de dimension 2, puisqu'on a vu que l'application :

$$\begin{aligned} T_0 : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ y &\longmapsto (y(t_0); y'(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{K}^2$.

- L'ensemble $\mathcal{S}_2$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *i.e.* vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 en considérant l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S}_2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0; u_1) \end{aligned}$$

II. Définition d'une application linéaire

1 Isomorphismes en dimension finie

2 Définition d'une application linéaire

- À partir de l'image d'une base
- À partir d'espaces supplémentaires

3 Rang d'une application linéaire

4 Formes linéaires et hyperplans

5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries



II. Définition d'une application linéaire

Exemple 1 :

Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'application $\varphi_i : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire appelée

$$(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \longmapsto x_i$$

fonction $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

En particulier, $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Théorème 1 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec $\dim(E) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F , il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad g(e_i) = f_i.$$



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Théorème 1 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec $\dim(E) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F , il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad g(e_i) = f_i.$$

À retenir :

Corollaire 4 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Théorème 1 :

On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec $\dim(E) = n$.

Pour toute **base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et toute famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de F , il existe une, et une seule application linéaire g de E dans F vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad g(e_i) = f_i.$$

À retenir :

Corollaire 4 :

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Exemple 8 :

Considérons l'ensemble P des vecteurs du plan muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

La donnée de $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ suffit à définir $f \in \mathcal{L}(P)$.

Par exemple, si $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, on a $f(\vec{u}) = \dots$



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Une application :

Proposition 8 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(E; F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E; F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Une application :

Proposition 8 :

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(E; F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E; F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Exemple 9 (Dimension du dual en dimension finie) :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

L'ensemble $E^* = \mathcal{L}(E; K)$ des formes linéaires sur E a donc même dimension que E .



II. Définition d'une application linéaire

1. À partir de l'image d'une base

Exercice 6 :

Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ les applications coordonnées correspondantes.

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.



II. Définition d'une application linéaire

2. À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .



II. Définition d'une application linéaire

2. À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

❶ Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$.



II. Définition d'une application linéaire

2. À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- ❶ Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$.
- ❷ Simplifier $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$.
En déduire que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \ker(f - \text{Id}_E)$.



II. Définition d'une application linéaire

2. À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- ❶ Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$.
- ❷ Simplifier $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$.
En déduire que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \ker(f - \text{Id}_E)$.
- ❸ Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f - 2\text{Id}_E)$.



II. Définition d'une application linéaire

2. À partir d'espaces supplémentaires

Proposition 9 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E; F)$;

Si $E = E_1 \oplus E_2$ alors f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Exercice 7 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$.

- ❶ Montrer que $\ker(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - 2\text{Id}_E) = \{0\}$.
- ❷ Simplifier $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E)$.
En déduire que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \ker(f - \text{Id}_E)$.
- ❸ Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f - 2\text{Id}_E)$.
- ❹ Prouver que $E = \ker(f - \text{Id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{Id}_E)$

Aide : $\text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) - (f - 2\text{Id}_E)$.



III. Rang d'une application linéaire

1 Isomorphismes en dimension finie

2 Définition d'une application linéaire

3 Rang d'une application linéaire

- Généralités
- Rang d'une composée
- Théorème du rang

4 Formes linéaires et hyperplans

5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $\text{rg}(p_1) = 1$.
 $(x, y) \longmapsto x$



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $\text{rg}(p_1) = 1$.
$$(x, y) \longmapsto x$$
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\text{rg}(\varphi) = 1$.

III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $\text{rg}(p_1) = 1$.
$$(x, y) \longmapsto x$$
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\text{rg}(\varphi) = 1$.
- Si $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $\text{rg}(p) = \dim(F)$.

III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Définition 2 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemples 10 :

- Le rang de l'application nulle est nul : $\text{rg}(0_{\mathcal{L}(E;F)}) = 0$, et c'est la seule telle application.
- Si $p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $\text{rg}(p_1) = 1$.
 $(x, y) \longmapsto x$
- Plus généralement, si φ est une forme linéaire non nulle, alors $\text{rg}(\varphi) = 1$.
- Si $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $\text{rg}(p) = \dim(F)$.
- Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 0$, alors $\text{rg}(\lambda \text{Id}_E) = \dim(E)$.

III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

$$\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim(E); \dim(F)).$$

Plus précisément :

- ❶ Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leq \dim(F)$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.

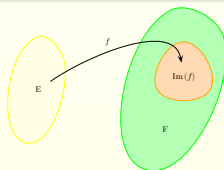


Figure 1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Théorème 10 (Inégalités sur le rang et cas d'égalité) :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

$$\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E); \dim(F)).$$

Plus précisément :

- ❶ Si F est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$, avec égalité si, et seulement si f est surjective.
- ❷ Si E est de dimension finie, f est de rang fini et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si f est injective.

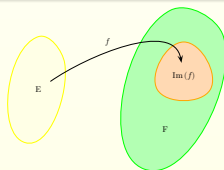


Figure 1 – En général, une application ne peut que « contracter » son ensemble de définition.



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

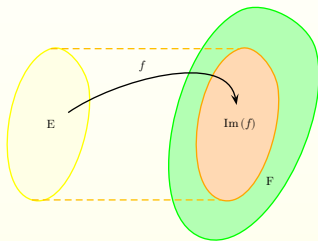


Figure 2 – f est injective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.

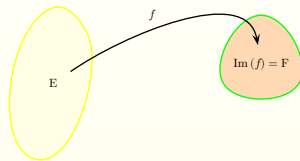


Figure 3 – f est surjective si, et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.



III. Rang d'une application linéaire

1. Généralités

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que

$$E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \iff E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f) \iff \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}.$$



III. Rang d'une application linéaire

2. Rang d'une composée

Proposition II :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f); \operatorname{rg}(g)).$$



III. Rang d'une application linéaire

2. Rang d'une composée

Proposition 11 :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f); \text{rg}(g)).$$

Proposition 12 :

Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $u \in \mathcal{L}(G; E)$ et $v \in \mathcal{L}(F; H)$ sont des **isomorphismes** alors :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ u) = \text{rg}(v \circ f).$$

Le rang est inchangé par isomorphisme.



III. Rang d'une application linéaire

2. Rang d'une composée

Exercice 9 (Inégalité triangulaire) :

On considère deux endomorphismes f et g d'un espace E de dimension finie.

Établir que $|\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f)| \leq \operatorname{rg}(g + f) \leq \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f)$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Théorème 13 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev avec E de dimension finie. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$.

En particulier,

$$\dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E).$$



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ① La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.

C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ① La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ② La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ❶ La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ❷ La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
- ❸ Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ❶ La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ❷ La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
- ❸ Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.
- ❹ Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ❶ La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ❷ La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
- ❸ Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.
- ❹ Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
 - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ❶ La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ❷ La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
- ❸ Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.
- ❹ Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
 - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
 - Il n'existe pas de d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Remarques :

- ❶ La dimension de l'image $\text{Im}(f)$ est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.
C'est la dimension du noyau qui fixe la perte entre $\dim(E)$ et $\dim(\text{Im}(f))$.
- ❷ La dimension de l'espace d'arrivée n'intervient pas.
- ❸ Cette formule permet de trouver $\dim(E)$, $\text{rg}(u)$ ou $\dim(\ker(u))$: suivant les 2 quantités que l'on connaît, on peut en déduire la 3^{ème}.
- ❹ Prenez le temps de réfléchir qu'en dimension finie et d'après le théorème du rang :
 - Il n'existe pas de d'application linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
 - Il n'existe pas de d'application linéaire surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Contre-Exemples II :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{est linéaire, injective, mais non surjective.} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x - y) \end{aligned}$$

III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice 10 :

- 1 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice 10 :

❶ Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.

❶ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice 10 :

❶ Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.

❶ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.

❷ $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice 10 :

- ❶ Vérifier que les applications suivantes sont linéaires.
 - ❶ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (4x, y - x, 2x + y)$.
 - ❷ $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y)$.
- ❷ Déterminer une base du noyau, et une base de l'image pour chacune d'elles.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $E = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(f)$: $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\text{ker}(f) \subset E$ et $\text{Im}(f) \subset F$) !

ATTENTION



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Il s'agit d'une égalité de dimension, pas d'espaces ! On n'a pas, en général, $E = \text{Im}(f) \oplus \text{ker}(f)$: $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas nécessairement supplémentaires.

ATTENTION

- En général, ils ne sont même pas dans le même espace ($\text{ker}(f) \subset E$ et $\text{Im}(f) \subset F$) !
- Même lorsque f est un endomorphisme, on n'a pas nécessairement $\text{ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$!

Par exemple, pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ On a
$$(x, y) \longmapsto (y, 0).$$

$\text{ker}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}(1; 0)$: $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

À l'aide du **théorème (13)** on redémontre aisément des résultats connus :

Corollaire 5 (Caractérisation des isomorphismes) :

❶ Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective.



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

À l'aide du **théorème (13)** on redémontre aisément des résultats connus :

Corollaire 5 (Caractérisation des isomorphismes) :

❶ Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de **même** dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E; F)$.

f est injective $\iff f$ est surjective $\iff f$ est bijective.

❷ Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension **finie** et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\ker(f) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(f) = E \iff \operatorname{rg} f = \dim(E) \iff f \in \mathcal{GL}(E)$$



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples 12 :

- $g: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme injectif, mais
$$P \mapsto XP$$

non surjectif.

ATTENTION



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Ce corollaire n'est plus vrai en dimension infinie !

Contre-Exemples 12 :

■ $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme injectif, mais
$$P \mapsto XP$$

non surjectif.

■ $h : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est un endomorphisme surjectif, mais
$$P \mapsto P'$$

non injectif.

ATTENTION



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice II :

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

- ❶ Vérifier que φ est un endomorphisme de E .



III. Rang d'une application linéaire

3. Théorème du rang

Exercice II :

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné).

Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

- ❶ Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
- ❷ Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

- 1 Isomorphismes en dimension finie
- 2 Définition d'une application linéaire
- 3 Rang d'une application linéaire
- 4 Formes linéaires et hyperplans**
 - Équations linaires
 - Hyperplans
 - Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène
- 5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Rappel :

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Rappel :

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
 - $f : E \mapsto F$, une application linéaire.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Rappel :

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
 - $f : E \mapsto F$, une application linéaire.
 - $b \in F$, appelé second membre de l'équation.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Rappel :

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
 - $f : E \mapsto F$, une application linéaire.
 - $b \in F$, appelé second membre de l'équation.
 - $x \in E$, un vecteur quelconque.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Rappel :

- On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme $f(x) = b$ avec :
 - $f : E \mapsto F$, une application linéaire.
 - $b \in F$, appelé second membre de l'équation.
 - $x \in E$, un vecteur quelconque.
- On appelle **équation homogène** associée à $f(x) = b$ l'équation linéaire $f(x) = 0_F$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Proposition 14 :

Soit $f : E \mapsto F$, une application linéaire.

- 1 L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_F$ est $\ker(f)$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Proposition 14 :

Soit $f : E \mapsto F$, une application linéaire.

- ❶ L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_F$ est $\ker(f)$.
- ❷ L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \text{Im}(f)$ et, dans ce cas :

$$(\mathcal{S}) = x_0 + (\mathcal{S}_0),$$

où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Proposition 14 :

Soit $f : E \mapsto F$, une application linéaire.

- ❶ L'ensemble $(\mathcal{S}_0)$ des solutions de $f(x) = 0_F$ est $\ker(f)$.
- ❷ L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de $f(x) = b$ est non vide si, et seulement si $b \in \text{Im}(f)$ et, dans ce cas :

$$(\mathcal{S}) = x_0 + (\mathcal{S}_0),$$

où x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$.

Remarque : Si f est bijective, l'équation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Exemples 13 :

- Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

est une équation linéaire $f(X) = B$ avec

$$f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad B = (b_1, \dots, b_n).$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Exemples 13 :

■ Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.

- $(\mathcal{P}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \Phi(x; y; z) = 0_{\mathbb{R}}\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\begin{aligned}\Phi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto x + y + z\end{aligned}$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Exemples 13 :

- Les droites, les plans de l'espace sont caractérisés par une équation linéaire.

- $(\mathcal{P}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \Phi(x; y; z) = 0_{\mathbb{R}}\} = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}})$ où

$$\begin{aligned}\Phi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x; y; z) &\longmapsto x + y + z\end{aligned}$$

- $(\mathcal{D}) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \varphi(x; y; z) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^2})$ où

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) &\longmapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y \end{pmatrix}\end{aligned}$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

1. Équations linéaires

Exemples B :

- Toute équation différentielle linéaire d'ordre un $y' + a(t)y = b(t)$ peut être interprétée comme une équation linéaire $f(y) = b(t)$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}) & \text{et} & \quad b \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R}). \\ y &\longmapsto y' + ay \end{aligned}$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ leur ensemble.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E .



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E .

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \mapsto 0_E$ est E tout entier.

On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E .



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Rappel :

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie).

On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ leur ensemble.

Définition (Hyperplan) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas forcément de dimension finie).

On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire NON NULLE de E .

Le noyau de la forme linéaire nulle $x \mapsto 0_E$ est E tout entier.

On précise donc « non nulle » dans la définition pour éviter que E lui-même soit un hyperplan de E .

Conséquence : En dimension finie, tout Hyperplan est un ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées dans une base fixée.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples 14 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples 14 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$.
- L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P'(1) + P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P'(1) + P(0)$.

On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de

$P : P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples 14 :

- Le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x + y - z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto 2x + y - z$.
- L'ensemble $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P'(1) + P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P'(1) + P(0)$.

On voit moins bien ici que H est décrit par une équation linéaire sur les coordonnées, mais si on introduit les coefficients a, b, c, d de

$P : P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, H est décrit par l'équation $3a + 2b + c + d = 0$.

- L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'(0) = f(0)\}$ est un hyperplan de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0) - f'(0)$.

Ici, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H une partie de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 H est un hyperplan de E .



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H une partie de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ H est un hyperplan de E .
- ❷ H est supplémentaire d'une droite de E .



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H une partie de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ H est un hyperplan de E .
- ❷ H est supplémentaire d'une droite de E .

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 15 (Caractérisation géométrique des hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et H une partie de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ❶ H est un hyperplan de E .
- ❷ H est supplémentaire d'une droite de E .

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, les hyperplans de E sont donc ses sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Exemples 15 :

En dimension 3, les hyperplans sont des plans et en dimension 2, les hyperplans sont des droites.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

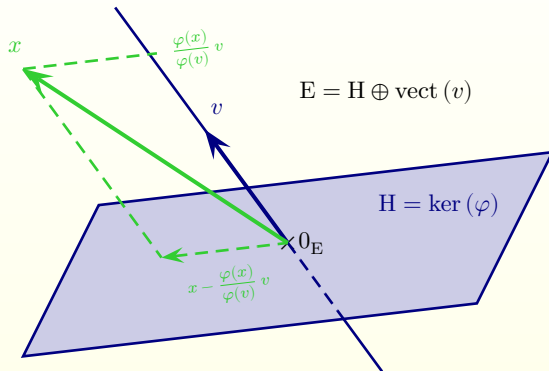


Figure 4 – $\mathbb{R}^3$ est engendré par une droite et un plan ne la contenant pas.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples $\mathbb{K}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples $\mathbb{K}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples $\mathbb{K}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathbb{K}_n[X]$ est donc un hyperplan de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$.
- $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ un hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$, noyau de la $(n+1)^{\text{ème}}$ forme coordonnée.
- La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices de trace nulle est donc un hyperplan (de dimension $n^2 - 1$ dans ce cas) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples 17 :

- L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y = z + t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 1 = 3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$(x, y, z, t) \mapsto 2x + y - z - t.$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exemples 17 :

- L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y = z + t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4 - 1 = 3$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$(x, y, z, t) \mapsto 2x + y - z - t.$$

- L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(0) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension $5 - 1 = 4$ en tant que noyau de la forme linéaire non nulle

$$P \mapsto P(1) - P(0).$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exercice 12 :

Soit H un hyperplan de E de dimension finie.

Montrer que, pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}.a$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau.

Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$H = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi.$$



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Théorème 16 (Comparaison des équations d'un hyperplan) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E dont H est le noyau.

Alors $\psi = \lambda\varphi$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$H = \ker(\varphi) = \ker(\psi) \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\varphi.$$

En résumé, tout hyperplan possède une et une seule « vraie » équation, toutes ses équations sont multiples les unes des autres.

Nous connaissons bien ce résultat en géométrie élémentaire, le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ et le plan d'équation $2x + 2y + 4z = 0$ sont évidemment un seul et même plan, et ce plan n'a pas d'équation « vraiment » différente.



IV. Formes linéaires et hyperplans

2. Hyperplans

Exercice 13 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}[X]$ et en déterminer une base.



IV. Formes linéaires et hyperplans

3. Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

Considérons un système d'équations linéaires homogène de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, posons $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,p}x_p$.

φ_i est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^p$. Son noyau est donc un hyperplan H_i .

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions du système correspond ainsi à l'intersection $\bigcap_{i=1}^n H_i$ de n hyperplans de $\mathbb{R}^p$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

3. Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- ④ L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.



IV. Formes linéaires et hyperplans

3. Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- ❶ L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.
- ❷ Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E .



IV. Formes linéaires et hyperplans

3. Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

De manière plus générale :

Théorème 17 (Intersections d'hyperplans) :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- ❶ L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension AU MOINS $n - r$.
- ❷ Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactement r hyperplans de E .

Dans $\mathbb{R}^3$, nous savons bien qu'une équation scalaire décrit un plan et que deux telles équations, pour peu qu'elles ne soient pas multiples l'une de l'autre, décrivent une droite.

L'idée générale du théorème ci-dessus, c'est que dans un système linéaire, chaque équation occasionne POTENTIELLEMENT la perte d'une dimension par rapport au nombre total d'inconnues.

Pourquoi potentiellement ? Parce que certaines équations peuvent être redondantes et ne pas compter vraiment dans le système.



IV. Formes linéaires et hyperplans

3. Interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires homogène

Par exemple, le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ décrit une droite de dimension $1 \geq 3 - 3 = 0$ et non un point de $\mathbb{R}^3$ car la troisième équation n'est jamais que la somme des deux premières.

Le théorème s'applique.



V. Endomorphismes remarquables

- 1 Isomorphismes en dimension finie
- 2 Définition d'une application linéaire
- 3 Rang d'une application linéaire
- 4 Formes linéaires et hyperplans
- 5 Endomorphismes remarquables : projecteurs et symétries**
 - Homothéties
 - Projecteurs
 - Symétries



V. Endomorphismes remarquables

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps.



V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_E :

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned} .$$



V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_E :

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned} .$$

Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport λ , toujours centrée en l'origine quand on travaille dans un espace vectoriel.



V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_E :

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned} .$$

Proposition 18 :

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.



V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Définition 4 :

Soient E un espace vectoriel réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme de E de la forme λId_E :

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \lambda \cdot_E x \end{aligned}$$

Proposition 18 :

Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E dont l'automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Remarque : En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de E . On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.



V. Endomorphismes remarquables

1. Homothéties

Exercice 14 :

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

On appelle **projection** (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \mapsto E_1$ telle que :

$$\forall x_1 \in E_1, p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in E_2, p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1. \end{aligned}$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

On appelle **projection** (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \mapsto E_1$ telle que :

$$\forall x_1 \in E_1, p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in E_2, p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 5 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

On appelle **projection** (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application $p : E \mapsto E_1$ telle que :

$$\forall x_1 \in E_1, p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in E_2, p(x_2) = 0_E.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E_1 \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

On dira qu'une application p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E tels que p soit la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Notons qu'il est indispensable de préciser l'espace E_2 parallèlement auquel on projette. Il n'y a pour l'instant aucune notion de projection orthogonale dans un espace vectoriel.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Remarque : L'existence et l'unicité d'une telle application linéaire p est donnée par la **proposition (9)** avec

$$\begin{array}{lll} f|_{E_1} : E_1 & \longrightarrow & E \\ x_1 & \longmapsto & x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} f|_{E_2} : E_2 & \longrightarrow & E \\ x_2 & \longmapsto & 0_E. \end{array}$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 18 :

Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ i.e. $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}\vec{e}_2 = D_1 \oplus D_2$.

On peut alors définir la projection p sur D_1 parallèlement à D_2 :

$$\begin{aligned} p : \vec{\mathcal{E}}_2 = D_1 \oplus D_2 &\longrightarrow E_1 \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 &\longmapsto \vec{x}_1. \end{aligned}$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

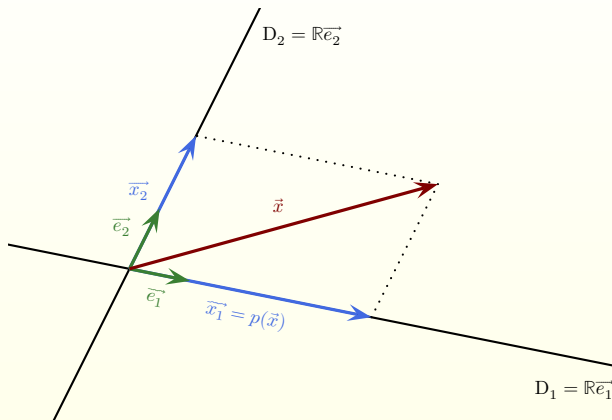


Figure 5 – Exemple de projecteur dans $\mathbb{R}^2$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

$$\bullet \quad p \in \mathcal{L}(E)$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $p \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $p \circ p = p$ (On dit que p est idem-potent.)



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $p \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $p \circ p = p$ (On dit que p est **idem-potent**.)
- ❸ $E_2 = \ker(p)$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $p \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $p \circ p = p$ (On dit que p est **idem-potent**.)
- ❸ $E_2 = \ker(p)$.
- ❹ $E_1 = \operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p .



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Proposition 19 (Propriétés des projecteurs) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $p \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $p \circ p = p$ (On dit que p est **idem-potent**.)
- ❸ $E_2 = \ker(p)$.
- ❹ $E_1 = \operatorname{Im}(p) = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par p .

En particulier, si p est un projecteur alors $\ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = E$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

ATTENTION

$x \mapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante !



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Théorème 20 (Caractérisation des projecteurs) :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

ATTENTION

$x \mapsto |x|$ est idem-potente mais n'est pas une projection. La linéarité est importante !

Ce théorème signifie que l'étude des applications linéaires idem-potentes est achevée.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

- ❶ p est un projecteur.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

- ❶ p est un projecteur.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$:

$$E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

- ❶ p est un projecteur.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$:

$$E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$

- ❸ p est LA projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Méthode 3 :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$ alors on peut affirmer :

- ❶ p est un projecteur.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$:

$$E = \ker(p) \oplus \text{Im}(p).$$

- ❸ p est LA projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

À retenir :

Dans le cas d'un projecteur p , retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall u \in E, u = \underbrace{p(u)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{u - p(u)}_{\in \ker(p)}.$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 19 :

Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 19 :

Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p(p((x, y))) = p\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p((x, y)).$

Donc $p \circ p = p$.

V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 19 :

Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p(p((x, y))) = p\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p((x, y)).$

Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 19 :

Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p(p((x, y))) = p\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p((x, y)).$

Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker(p) &\iff \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = (0, 0) \iff y = -x \iff (x, y) = (x, -x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).\end{aligned}$$

$$(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exemple 19 :

Considérons l'application du plan $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

- $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $p(p((x, y))) = p\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = p((x, y)).$

Donc $p \circ p = p$.

On en déduit que p est un projecteur.

De plus :

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker(p) &\iff \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = (0, 0) \iff y = -x \iff (x, y) = (x, -x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).\end{aligned}$$

$$(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

Donc, p est le projecteur sur $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, -1)$.

V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

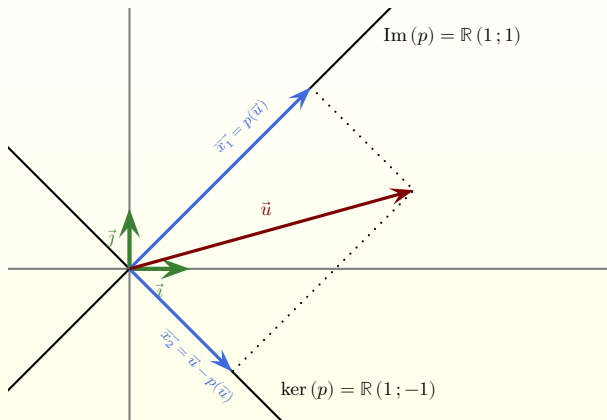


Figure 6 – Projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exercice 15 :

Identifier l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -9x + 6y \\ -15x + 10y \\ -5x + 3y + z \end{pmatrix}$$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

① $p + q = Id_E$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Définition 6 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Soit :

- p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

On dit que p et q sont des **projecteurs associés**.

Proposition 21 :

Si p et q sont deux projecteurs associés, alors :

❶ $p + q = \text{Id}_E.$

❷ $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p, q deux projecteurs de E .

- 1 Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.



V. Endomorphismes remarquables

2. Projecteurs

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p, q deux projecteurs de E .

- ❶ Démontrer que $p \circ q = p \iff \ker(q) \subset \ker(p)$.
- ❷ Démontrer que $p \circ q = q \iff \operatorname{Im}(q) \subset \operatorname{Im}(p)$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Définition 1 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \text{Id}_E$.

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Définition 1 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \text{Id}_E$.

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 - x_2. \end{aligned}$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Définition 1 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \text{Id}_E$.

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Définition 1 :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2

On appelle **symétrie** par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = 2p - \text{Id}_E$.

$$\forall x = x_1 + x_2 \in E \text{ où } (x_1; x_2) \in E_1 \times E_2, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} s : E = E_1 \oplus E_2 &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Vocabulaire : E_1 est appelé sa base et E_2 sa direction.

Remarque : On a aussi $s = p - q$ où p et q sont les projecteurs associés à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 20 :

Dans $\vec{\mathcal{E}}_2$, on considère deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ non colinéaires.

Pour tout vecteur $\vec{x} \in \vec{\mathcal{E}}_2$, il existe un unique couple de réels $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ i.e. $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbb{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbb{R}\vec{e}_2 = D_1 \oplus D_2$.

On peut alors définir la symétrie s par rapport à D_1 parallèlement à D_2 :

$$\begin{aligned} s : \vec{\mathcal{E}}_2 = D_1 \oplus D_2 &\longrightarrow E_1 \\ \vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} &\longmapsto \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}. \end{aligned}$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

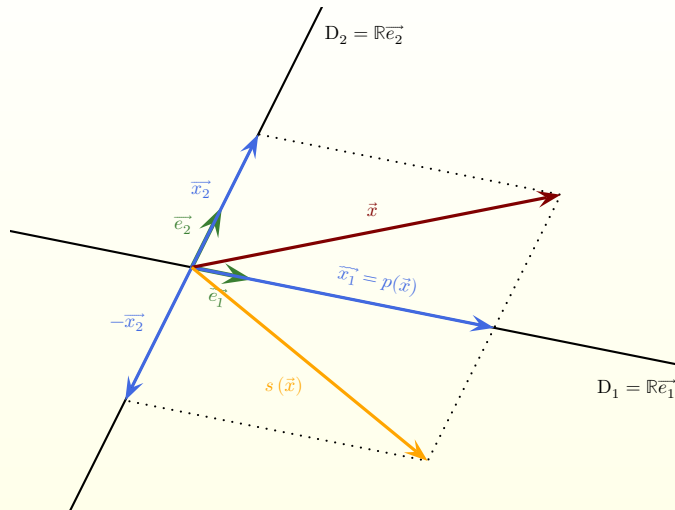


Figure 7 – Exemple de symétrie dans $\mathbb{R}^2$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

$$\bullet \quad s \in \mathcal{L}(E)$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $s \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $s \circ s = Id_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $s \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $s \circ s = Id_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
- ❸ $E_1 = \ker(s - Id_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $s \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $s \circ s = Id_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
- ❸ $E_1 = \ker(s - Id_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .
- ❹ $E_2 = \ker(s + Id_E)$ i.e. E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s .



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $s \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $s \circ s = Id_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
- ❸ $E_1 = \ker(s - Id_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .
- ❹ $E_2 = \ker(s + Id_E)$ i.e. E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s .

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E) = E$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Proposition 22 (Propriétés des symétries) :

Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Alors :

- ❶ $s \in \mathcal{L}(E)$
- ❷ $s \circ s = \text{Id}_E$ i.e. s est un automorphisme involutif de E et $s^{-1} = s$.
- ❸ $E_1 = \ker(s - \text{Id}_E)$ i.e. E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s .
- ❹ $E_2 = \ker(s + \text{Id}_E)$ i.e. E_2 est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé par s .

En particulier, si s est une symétrie alors $\ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E) = E$.

Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise $E_1 = \ker(s - \text{Id}_E)$ est laissé fixe par s , et ce parallèlement à quoi on symétrise $E_2 = \ker(s + \text{Id}_E)$ est envoyé sur son opposé.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \text{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \text{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

ATTENTION

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Théorème 23 (Caractérisation des symétries) :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = \text{Id}_E.$$

Plus précisément, $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \text{Id}_E)$.

ATTENTION

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est involutive mais n'est pas une symétrie. La linéarité est importante !

Comme pour les projecteurs, ce théorème signifie que l'étude des applications linéaires involutives est achevée.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors on peut affirmer :

- 1 s est une symétrie.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors on peut affirmer :

- ❶ s est une symétrie.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - Id_E)$ et $\ker(s + Id_E)$:

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E).$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors on peut affirmer :

- ❶ s est une symétrie.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - Id_E)$ et $\ker(s + Id_E)$:

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E).$$

- ❸ s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Méthode 4 :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$ alors on peut affirmer :

- ❶ s est une symétrie.
- ❷ E se décompose en deux sous-espaces supplémentaires qui s'avèrent être $\ker(s - Id_E)$ et $\ker(s + Id_E)$:

$$E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E).$$

- ❸ s est LA symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.

À retenir :

Dans le cas d'une symétrie s , retenez bien cette décomposition commode :

$$\forall u \in E, u = \underbrace{\frac{u + s(u)}{2}}_{\in \ker(s - Id_E)} + \underbrace{\frac{u - s(u)}{2}}_{\in \ker(s + Id_E)}.$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Remarque : Comme pour les projecteurs, on pourrait envisager une décomposition de E de la forme $E = \ker(s) \oplus \operatorname{Im}(s)$ mais sachant que s est bijective, cette décomposition est, somme toute, triviale et inutile.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 21 :

$$\begin{aligned}\text{Soit } S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x)\end{aligned}$$

$$\blacksquare S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 21 :

$$\begin{aligned}\text{Soit } S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x)\end{aligned}$$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = Id_E$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 21 :

$$\begin{aligned}\text{Soit } S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x)\end{aligned}$$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = Id_E$.

On en déduit que S est une symétrie.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 21 :

$$\begin{aligned}\text{Soit } S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x)\end{aligned}$$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = \text{Id}_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,

$$(x, y) \in \ker(S - \text{Id}_E) \iff (y, x) = (x, y) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker(S + \text{Id}_E) &\iff (y, x) = (-x, -y) \iff x = -y \iff (x, y) = (x, -x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).\end{aligned}$$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exemple 21 :

$$\begin{aligned}\text{Soit } S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y, x)\end{aligned}$$

- $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
- $S(S((x, y))) = S((y, x)) = (x, y)$ d'où $S \circ S = \text{Id}_E$.

On en déduit que S est une symétrie.

De plus,

$$(x, y) \in \ker(S - \text{Id}_E) \iff (y, x) = (x, y) \iff x = y \iff (x, y) = (x, x) \iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, 1).$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker(S + \text{Id}_E) &\iff (y, x) = (-x, -y) \iff x = -y \iff (x, y) = (x, -x) \\ &\iff (x, y) \in \mathbb{R}(1, -1).\end{aligned}$$

Donc S est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(1, 1)$ parallèlement à $\mathbb{R}(1, -1)$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

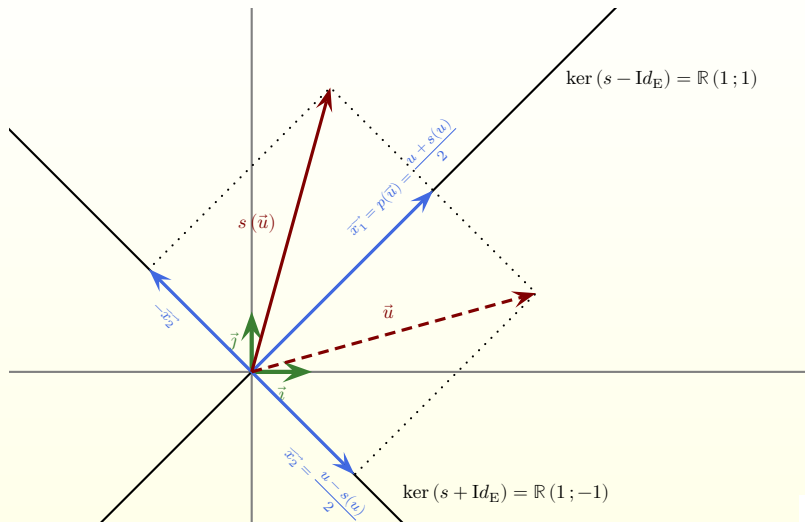


Figure 8 – Symétrie par rapport à la droite $y = x$ et parallèlement à $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exercice 17 :

Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) / x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$.

- ① Vérifier que $F \oplus G = E$.



V. Endomorphismes remarquables

3. Symétries

Exercice 17 :

Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(x, y, z) / x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$.

- ❶ Vérifier que $F \oplus G = E$.
- ❷ Soit s la symétrie de base F de direction G . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, déterminer $s((x, y, z))$.

