

Applications linéaires

I/ Généralités

Exercice 1 : Montrer qu'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe (x', y') est linéaire si, et seulement si, il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :
$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}.$$

Trouver de même l'écriture analytique d'une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$; de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Généraliser à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : E et F sont des $\mathbb{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit $\phi : E \times F \longrightarrow E \times F$.

$$(x, y) \longmapsto (x, y - f(x))$$

Montrer que ϕ est un automorphisme du $\mathbb{K}$ -ev produit $E \times F$.

Exercice 3 : 1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1), \quad f((0, 1, 0)) = (0, 1) \quad \text{et} \quad f((0, 0, 1)) = (-1, 1).$$

Calculer $f((3, -1, 4))$ et $f((x, y, z))$ en général.

2. Déterminer $\ker(f)$ et en fournir une base.
3. Donner un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\text{Im}(f)$.

Exercice 4 : Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker(f) = \text{Im}(f)$.
2. $\ker(f)$ inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
3. $\text{Im}(f)$ inclus strictement dans $\ker(f)$.

Exercice 5 : Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ avec

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P'. \end{aligned}$$

Même question si f est définie sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 6 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image. Sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.
2. $(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 3z, 2x + 4y - 4z)$.
3. $P \mapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.
4. $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Exercice 7 : 1. Montrer que l'application $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
2. Proposer un exemple d'isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exercice 8 : On définit f, g de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Montrer que g est injective et non surjective.

Exercice 9 : On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout polynôme P associe le réel $\int_0^1 P(t) dt$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la dimension de son noyau, et une base de ce noyau.

II/ Rang d'une application linéaire _____

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$, discuter selon les valeurs du paramètre réel a la dimension de $\text{vect}(u, v, w)$ avec $u = (a, 1, 1)$, $v = (1, a, 1)$ et $w = (1, 1, a)$.

Exercice 11 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$.
Déterminer le rang de f .

Exercice 12 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$.

Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$.

2. On ajoute l'hypothèse : $f + g \in \mathcal{GL}(E)$.

Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$.

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z, t)) = (x + y + z + 2t, y - z + t, x - y + 3z)$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker(f) = \text{vect}((1, 1, 0, -1), (-3, 0, 1, 1))$.
3. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^4$, calculer le rang de $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ et déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Vérifier le théorème du rang.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose $E = \ker(f) + \ker(g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

À l'aide du théorème du rang, montrer que :

$$\ker(u) = \ker(u^2) \iff \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u).$$

Exercice 16 : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \longmapsto & (x; 2x - y) \end{array}$ Montrer que $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 17 : Dans le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$, on considère $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ par $f(1) = 1 + i$ et $f(i) = 3 - i$.

Montrer que f est un automorphisme.

III/ Endomorphismes remarquables _____

Exercice 18 : Soit $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $p((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\ker(p)$ et de $\text{Im}(p)$.

Exercice 19 : Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, 0\right)$.

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
3. f est-elle un projecteur ?

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que $f^2 = \operatorname{Id}_E \iff \frac{1}{2}(f + \operatorname{Id}_E)$ est un projecteur.

Exercice 21 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E .

On suppose que p et q commutent. Montrer que $p \circ q$ est la projection de E sur $\operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ de direction $\ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 22 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E . Montrer que :

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0 \iff \operatorname{Im}(p) \subset \ker(q) \text{ et } \operatorname{Im}(q) \subset \ker(p).$$

Dans le cas où $p + q$ est un projecteur, déterminer $\ker(p + q)$ et $\operatorname{Im}(p + q)$.

Exercice 23 : On considère l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, on associe l'élément $T(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = f(-x).$$

Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 24 : Soit E un $\mathbb{C}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

On pose $F = \{x \in E; f(x) = ix\}$ et $G = \{x \in E; f(x) = -ix\}$.

1. Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Déterminer l'expression de f en fonction des projecteurs p et q associés à la somme directe précédente.